

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Множество – начальное, неопределяемое понятие. Вот что сказано немецким ученым Георгом Кантором: «Под «множеством» мы понимаем любое объединение в одно целое определенных вполне различаемых объектов из нашего восприятия или мысли». Но это описание понятия множества нельзя считать его математическим определением. Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие. Это понятие можно только постараться пояснить на примерах.

Представление о множестве дает любое семейство или собрание объектов: слова в словаре, все положительные действительные числа, дни недели и т. п. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества.

Множества обозначаются некоторыми идентификаторами (обычно из прописных букв): A , B , C , и т.п. Элементы множеств обозначаются строчными буквами или буквами с индексами, например a , x , c_{ij} и т. д.

Отметим, что для основных числовых множеств применяются следующие обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел;

C – множество комплексных чисел.

Для обозначения того, что объект x является элементом множества A , применяется формальная запись $x \in A$ или $A \ni x$, которая читается так: x принадлежит A или A содержит x соответственно. Если x не принадлежит A , применяется запись $x \notin A$. Например, $0.3 \notin N$, однако $0.3 \in Q$. Для задания определенного множества A надо указать те элементы, которые ему принадлежат. Это можно сделать несколькими способами, например:

перечислением элементов: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; заданием характеристического свойства: $B = \{x | x \in Z, \text{четное}\}$; порождающей процедурой:

$$F = \{x_k | x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_k = x_{k-2} + x_{k-1}\}.$$

Отметим, что знак $|$, читается: «... такие, что, ...».

Для определения основных операций над множествами будем использовать некоторые знаки, которые пока можно считать просто стенографическими знаками для сокращения письма:

$\Rightarrow$ – если A , то B , или из A следует B ;

$\Leftrightarrow$ – A истинно тогда и только тогда, когда истинно B ;

$\neg$ – не A , неверно, что A ;

$\vee$ – или A или B (или оба);

$\wedge$ – и A и B ;

$\forall$ – для всякого ..., любой, всякий;

$\exists$ – существует, найдется такой ..., что ...;

$\exists!$ – существует и при том только один, такой ..., что ...

Все знаки, кроме трех последних, связывают какие-то утверждения, обозначенные через A и B , и называются логическими связками. Три последних знака обращаются к элементам множества и указывают «количество» элементов, имеющих некоторое свойство: все или хотя бы один – и называются кванторами (quantum - количество, сумма). Конечно, ценность этих знаков не только в сокращении письма. В дальнейшем будет показано, что (в некотором смысле) они являются полной основой языка, достаточного для записи любого математического утверждения.

1.1 Операции над множествами, их свойства

Определение. Множество A называется подмножеством (частью) множества B , и это обозначается так: $A \subset B$, если все элементы из A являются

также и элементами множества B . С использованием введенных знаков это можно записать так:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Последняя запись может быть прочитана так: A является подмножеством B тогда и только тогда, когда для любого x из того, что он содержится в A , следует, что он содержится в B . Для множеств это отношение включения напоминает отношение неравенства для чисел; во всяком случае, если конечное множество A является подмножеством конечного множества B , то количество элементов в A не больше числа элементов в B . Количество элементов в конечном множестве A будем обозначать так: $|A|$.

Определение. Назовем два множества равными и будем это обозначать так: $A = B$, если $A \subset B \wedge B \subset A$.

Определим некоторые операции над множествами.

Определения:

Объединение (или сумма): $A \cup B$ (или $A + B$) = $\{x | x \in A \vee x \in B\}$;

Пересечение (или произведение):

$$A \cap B \text{ (или } AB) = \{x | x \in A \wedge x \in B\};$$

Разность: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$;

Симметрическая разность:

$$A \nabla B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Операции объединения и пересечения обобщаются на семейства (наборы) множеств.

Пусть I - некоторое множество, каждому $i \in I$ соответствует множество A_i , тогда множество

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I : x \in A_i\},$$

называется объединением семейства множеств A_i (по множеству индексов I).

Аналогично определяется пересечение семейства множеств:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

Определение. Пусть $A \subset B$. Дополнением множества A в множестве B называют множество всех тех элементов из B , которые не принадлежат A :

$$\bar{A}_B = \{x | x \in B \wedge x \notin A\},$$

или

$$\bar{A}_B = A \setminus B.$$

Часто приходится рассматривать такие множества, которые все являются подмножеством некоторого фиксированного множества U . Множество U , в котором берутся дополнения, предполагается известным, поэтому просто говорят о дополнении A и обозначают $\bar{A}$. Множество U называют универсальным.

Из определения дополнения видно, что дополнение самого множества U пусто, т.е. $\bar{U} = \emptyset$, а дополнение пустого множества совпадает с U .

Если $AB = \emptyset, A + B = U$, то каждое из множеств A, B служит дополнением другого. В частности, поскольку $A\bar{A} = \emptyset, A + \bar{A} = U$, то дополнением $\bar{A}$ служит A , т.е. $\bar{\bar{A}} = A$.

Рассмотрим некоторые свойства операций.

1. Ассоциативность объединения и пересечения

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

2. Коммутативность объединения и пересечения

$$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A.$$

3. Дистрибутивность пересечения относительно объединения, дистрибутивность объединения относительно пересечения

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. Поглощение

$$(A \cap B) \cup A = A;$$

$$(A \cup B) \cap A = A.$$

5. Свойства нуля и единицы

$$A \cup \emptyset = A;$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cup U = U;$$

$$A \cap U = A.$$

6. "Законы де Моргана"

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

7. Свойства дополнения и разности

$$A \cup \bar{A} = U;$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

Отметим, что для доказательства равенства двух множеств необходимо, согласно определению, показать, что всякий элемент из одного множества содержится во втором, и наоборот, любой элемент второго содержится в первом множестве.

Определение. Пусть заданы два множества A и B . Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество всевозможных упорядоченных пар вида (a, b) , где $a \in A, b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Аналогично дается определение декартова произведения нескольких множеств. Вместо пар при этом рассматриваются упорядоченные наборы (кортежи) элементов перемножаемых множеств. Часто отождествляют, например, произведения $(A \times B) \times C, A \times (B \times C), A \times B \times C$.

Частным случаем произведения является декартова степень множества A : $A^n = A \times \dots \times A$ — n раз. Элементы множества A^n называются также векторами длины (размерности) n с координатами из множества A . В частности, элементы множества R^n называются арифметическими n -мерными векторами, а само множество R^n — арифметическим n -мерным векторным пространством.

1.2 Метод математической индукции

Все утверждения можно разбить на общие и частные. Например, общее: «все числа, оканчивающиеся четной цифрой, делятся на 2», частное: «число 138 делится на 2».

Переход от общих утверждений к частным называется дедукцией. Дедукция очень часто используется в математике. Все общие теоремы доказываются именно для того, чтобы затем использовать их для решения различных частных задач.

Но ряду с этим в математике часто приходится от частных утверждений переходить к общим. Этот переход называется индукцией.

В отличие от дедукции индукция может привести как к верным, так и неверным результатам. Узнать справедливо ли некоторое утверждение в общем случае иногда удается посредством применения особого метода рассуждений, называемого методом математической индукции. В основе метода математической индукции лежит следующий принцип:

Некоторое утверждение верно при любом натуральном n , если:

1) оно верно при $n = 1$;

2) из справедливости этого утверждения при каком-либо произвольном значении $n = k$ ($k \geq 1$), следует, что оно верно и при $n = k + 1$.

Действительно, при $n = 1$ утверждение верно в силу 1). Далее, $2 = 1 + 1$, а поэтому в силу 2) утверждение верно при $n = 2$; $3 = 2 + 1$, поэтому в силу 2) утверждение верно и при $n = 3$. Вообще, любое натуральное число n может быть получено из 1 путем последовательного прибавления к нему единицы $n - 1$ раз. При каждом таком прибавлении мы получаем натуральное число, для которого рассматриваемое утверждение верно. Поэтому оно верно и для натурального числа n .

Метод доказательства, основанный на использовании этого принципа, называется методом математической индукции.

Некоторые утверждения справедливы не для всех натуральных n , а лишь для натуральных n , начиная с некоторого числа p . Тогда имеет место принцип:

Некоторое утверждение верно при любом натуральном n , если:

1) оно верно при $n = p$;

2) из справедливости этого утверждения при каком-либо произвольном значении $n = k$ ($k \geq p$), следует, что оно верно и при $n = k + 1$.

Доказательство методом математической индукции состоит из двух этапов.

1-й этап. Проверяем, верно ли утверждение при $n = p, p \geq 1$.

2-й этап. Допускаем, что утверждение верно при $n = k$, и, исходя из этого, доказываем, что оно верно и при $n = k + 1$.

1.3 Бинарные отношения на множестве, их свойства. Операции над бинарными отношениями

Определение. Бинарным отношением, заданным на множестве A , называется любое подмножество декартова квадрата множества A .

Бинарные отношения будем обозначать малыми греческими буквами (с индексами и без индексов).

Примерами бинарных отношений на множестве $A = \{1, 2, 3\}$ могут служить следующие подмножества множества $A \times A$:

$$\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3)\},$$

$$\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\},$$

$$\rho_3 = \{(1, 2), (2, 1)\},$$

$$\rho_4 = \emptyset,$$

$$\rho_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\},$$

$$\rho_6 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}.$$

Бинарное отношение можно определить на любом непустом множестве. Например, если M — множество треугольников, то можно рассмотреть такое бинарное отношение: $\theta = \{(a, b) \mid (a, b \in M) \wedge (a \text{ подобен } b)\}$, или, если P — множество всех людей, бинарным отношением на P является следующее множество $\sigma = \{(a, b) \mid (a, b \in P) \wedge (a \text{ знает } b)\}$.

Если ρ — бинарное отношение, то наряду с записью $(a, b) \in \rho$ будем употреблять запись arb , имеющую тот же смысл, и если $(a, b) \notin \rho$, то соответственно $a\bar{r}b$.

Рассмотрим некоторые свойства бинарных отношений.

Определение. Бинарное отношение ρ , заданное на множестве M , называется рефлексивным, если $\forall a \in M \, ara$.

Чтобы сформулировать определение нерефлексивного бинарного отношения, нужно взять отрицание формулы $\forall a \, ara$. Согласно правилам построения отрицаний

$$\neg(\forall a \, ara) \equiv \exists a \, a\bar{r}a.$$

Следовательно, бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , называется нерефлексивным, если $\exists a \in A \, a\bar{r}a$. Элемент a в этом случае называется контрпримером к свойству рефлексивности.

Примерами рефлексивных бинарных отношений являются бинарные отношения $\rho_2, \rho_5, \theta, \sigma$.

Бинарные отношения $\rho_1, \rho_3, \rho_4, \rho_6$ не рефлексивны, так число 2 является для них общим контрпримером.

Определение. Бинарное отношение ρ , заданное на множестве M , называется симметричным, если $\forall a, b \in M \, (arb \Rightarrow bra)$.

Примерами симметричных бинарных отношений являются отношения $\rho_2, \rho_3, \rho_5, \theta$. Пустое бинарное отношение ρ_4 тоже симметрично, так как $arb \Rightarrow bra$ для него всегда верно. Бинарное отношение ρ_1 не симметрично, так как $(1, 2) \in \rho_1$ и $(2, 1) \notin \rho_1$, а значит пара $(1, 2)$ является контрпримером к этому свойству. По аналогичной причине не симметрично бинарное отношение ρ_6 .

Бинарное отношение σ не симметрично, так как очевидно найдутся два человека, из которых первый знает второго, а второй не знает первого.

Определение. Бинарное отношение ρ , заданное на множестве M , называется транзитивным, если $\forall a, b, c \in M (a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c)$.

Бинарные отношения $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \theta$ являются примерами транзитивных бинарных отношений. Бинарное отношение ρ_3 не транзитивно, так как $(1, 2) \in \rho_3 \wedge (2, 1) \in \rho_3$, но $(1, 1) \notin \rho_3$. Бинарное отношение σ не транзитивно, так как то, что a знает b и b знает c не означает, что a знает c .

Определение. Бинарное отношение ρ , заданное на множестве M , называется антисимметричным, если

$$\forall a, b \in M (a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b).$$

Среди приведенных выше бинарных отношений антисимметричными являются бинарные отношения $\rho_1, \rho_4, \rho_5, \rho_6$. Бинарное отношение ρ_2 не антисимметрично, так как $(1, 2) \in \rho_2$ и $(2, 1) \in \rho_2$, и $1 \neq 2$. По той же причине не антисимметрично бинарное отношение ρ_3 . Так как два подобных треугольника не обязательно равны, то, следовательно, θ – не антисимметричное бинарное отношение. Бинарное отношение σ не антисимметрично, так как два знакомых друг другу человека обязательно различны.

Пусть A, B – произвольные непустые множества и ρ – бинарное отношение между элементами множеств A и B , то есть $\rho \subset A \times B$.

Множество всех элементов из A , являющихся первыми компонентами упорядоченных пар из ρ называется областью определения бинарного отношения ρ , а множество всех вторых компонент – областью значений бинарного отношения ρ . Область определения ρ обозначается через $Dom \rho$, а область значений – через $Im \rho$. Таким образом,

$$Dom \rho = \{a \in A \mid \exists b \in B (a, b) \in \rho\},$$

$$Im \rho = \{b \in B \mid \exists a \in A (a, b) \in \rho\}.$$

Обратимся к рассмотренным выше примерам и для некоторых из них найдем область определения и область значений. Нетрудно видеть, что

$$\text{Dom } \rho_1 = \{1, 3\}, \text{Im } \rho_1 = A; \text{Dom } \rho_2 = A = \text{Im } \rho_2;$$

$$\text{Dom } \rho_4 = \emptyset = \text{Im } \rho_4;$$

$$\text{Dom } \rho_6 = \{1, 2\}, \text{Im } \rho_6 = \{2, 3\}; \text{Dom } \theta = \text{Im } \theta = M.$$

Определение. Пусть ρ – бинарное отношение между элементами множеств A и B . Тогда бинарное отношение $\rho' = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$ между элементами множеств B и A называется бинарным отношением, обратным к отношению ρ .

Пример 1. $\rho'_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$.

Пример 2. $\rho'_5 = \rho_5$.

Определение. Пусть A, B, C — непустые множества и $\rho \subset A \times B, \mu \subset B \times C$. Композицией бинарных отношений ρ и μ называется бинарное отношение

$$\rho \circ \mu = \{(a, c) \mid \exists b \in B ((a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \mu)\}.$$

Пример 3. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c\}, C = \{m, n\}$,

$$\rho = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}, \mu = \{(a, m), (a, n), (b, n), (c, m)\}.$$

Тогда

$$\rho \circ \mu = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n), (3, m)\}.$$

Определение. Пусть A — непустое множество и ρ, μ — отношения на множестве A , тогда

$$\text{объединение: } \rho \cup \mu = \{(a, b) \mid (a, b) \in \rho \vee (a, b) \in \mu\};$$

$$\text{пересечение: } \rho \cap \mu = \{(a, b) \mid (a, b) \in \rho \wedge (a, b) \in \mu\};$$

$$\text{разность: } \rho \setminus \mu = \{(a, b) \mid (a, b) \in \rho \vee (a, b) \notin \mu\};$$

$$\text{дополнение: } \bar{\rho} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin \rho\};$$

$$\text{тождественное отношение: } I := \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

Теорема. Пусть $\rho \subset A \times A$ – отношение, заданное на множестве A .

Тогда:

$$1. \quad \rho \text{ рефлексивно} \Leftrightarrow I \subset \rho.$$

2. ρ симметрично $\Leftrightarrow \rho = \rho'$.
3. ρ транзитивно $\Leftrightarrow \rho \circ \rho \subset \rho$.
4. ρ антисимметрично $\Leftrightarrow \rho \cap \rho' \subset I$.
5. ρ антирефлексивно $\Leftrightarrow \rho \cap I = \emptyset$.

1.4 Отношение эквивалентности. Построение разбиения множества по эквивалентности

Среди бинарных отношений важное место занимает отношение эквивалентности.

Определение. Бинарное отношение, заданное на множестве M , называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример 1. На множестве $M = \{1, 2, 3\}$ бинарное отношение $\rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно и потому является отношением эквивалентности.

Пример 2. Пусть $M = N$ и $\rho_2 = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имеют одинаковые остатки при делении на } 3\}$. Отношение ρ_2 рефлексивно, так как a и a имеют одинаковые остатки при делении на 3. Отношение ρ_2 симметрично, так как если a и b имеют одинаковые остатки при делении на 3, то b и a имеют одинаковые остатки при делении на 3. Отношение ρ_2 транзитивно, так как если a и b имеют одинаковые остатки при делении на 3 и b и c имеют одинаковые остатки при делении на 3, то a и c имеют одинаковые остатки при делении на 3. Следовательно, ρ_2 — отношение эквивалентности.

Пример 3. Пусть M — произвольное непустое подмножество, $\rho_3 = \{(a, b) \mid a = b\}$. Легко видеть, что ρ_3 — отношение эквивалентности на M .

Определение. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M и $a \in M$. Классом эквивалентных элементов, определяемых элементом a , называется множество $\bar{a} = \{b \in M \mid a \rho b\}$.

В этом случае a называется представителем класса $\bar{a}$.

В первом из предыдущих примеров $\bar{1} = \{1, 2\} = \bar{2}, \bar{3} = \{3\}$. Во втором примере имеем три различных класса, так как при делении на 3 возможны всего три остатка: 0, 1, 2. Этими классами являются множества

$$\bar{0} = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}, \bar{1} = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \bar{2} = \{3n + 2 \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

В третьем примере каждый класс эквивалентных элементов $\bar{a}$ состоит только из элемента a , то есть $\bar{a} = \{a\}$.

Определение. Разбиением множества M называется совокупность подмножеств M_i ($i \in I$), удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\forall i \in I \ M_i \neq \emptyset$,
- 2) $\forall i, j \in I \ (i \neq j \Rightarrow M_i \cap M_j = \emptyset)$,
- 3) $\bigcup_{i \in I} M_i = M$.

Пример 4. Пусть $M = \mathbb{N}$ и M_1 — множество всех нечетных чисел, M_2 — множество всех четных чисел. Ясно, что M_1 и M_2 — непустые подмножества, что $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ и $M_1 \cup M_2 = \mathbb{N}$. Следовательно, M_1, M_2 — разбиение множества $\mathbb{N}$.

Пример 5. $M = \mathbb{N}$ и $\forall n \ M_n = \{n\}$. Очевидно, что совокупность всех классов M_n образует разбиение множества $\mathbb{N}$.

Два предыдущих примера показывают, что для каждого непустого множества существует разбиение и если множество содержит более одного элемента, то число различных разбиений не меньше двух.

Между отношениями эквивалентности на множестве M и разбиениями множества M существует тесная связь. Эта связь определена в следующей теореме.

Теорема. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M . Тогда совокупность всех различных классов эквивалентных элементов образует разбиение множества M . Обратно: если совокупность подмножеств M_i ($i \in I$) образует разбиение множества M , то бинарное отношение $\mu = \{(a, b) \mid \exists i \in I \ a, b \in M_i\}$ является отношением эквивалентности на M .

Доказательство.

1. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M и $\bar{a}$ — произвольный класс эквивалентных элементов. Так как бинарное отношение ρ рефлексивно, то $\forall a \in M \ a \rho a$, а значит $a \in \bar{a}$. Это доказывает, что $\forall a \in M \ \bar{a} \neq \emptyset$.

Пусть $b \in M$ и $\bar{b} \cap \bar{a} \neq \emptyset$. Докажем, что $\bar{b} = \bar{a}$. Пусть $c \in \bar{b} \cap \bar{a}$. Тогда $c \in \bar{b}$ и $c \in \bar{a}$ и потому $(b, c) \in \rho, (a, c) \in \rho$. Если x — произвольный элемент из класса $\bar{b}$, то $(b, x) \in \rho$. Так как ρ симметрично, то $(x, b) \in \rho$, а так как ρ транзитивно и $(b, c) \in \rho$, то $(x, c) \in \rho$. Аналогично доказывается, что $(x, a) \in \rho$. Воспользовавшись снова симметричностью отношения ρ , заключаем, что $(a, x) \in \rho$ и потому $x \in \bar{a}$. Это означает, что $\bar{b} \subseteq \bar{a}$. Обратное включение $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ доказывается аналогично. Из этих двух включений вытекает равенство $\bar{b} = \bar{a}$.

Таким образом, два класса эквивалентных элементов либо равны между собой, либо не содержат общих элементов.

Далее, поскольку каждый класс эквивалентных элементов $\bar{a}$ является подмножеством в M , то объединение всех таких классов содержится в M , то есть $\bigcup_{a \in M} \bar{a} \subseteq M$. Но так как $\forall a \in M \ a \in \bar{a}$, то $a \in \bigcup_{a \in M} \bar{a}$ и потому $M \subseteq \bigcup_{a \in M} \bar{a}$. Следовательно, $M = \bigcup_{a \in M} \bar{a}$.

Таким образом, совокупность всех различных классов эквивалентных элементов образует разбиение множества M .

Первая часть теоремы доказана.

2. Пусть теперь совокупность классов M_i ($i \in I$) образует разбиение множества M .

Докажем, что бинарное отношение $\mu = \{(a, b) \mid \exists i \in I \ a, b \in M_i\}$ является отношением эквивалентности на M . Так как $M_i = M$, то $\forall a \in M \ \exists i \in I \ a \in M_i$. Это означает, что $\forall a \in M \ a \mu a$ и потому μ рефлексивно. Если $(a, b) \in \mu$, то $\exists i \in I \ a, b \in M_i$. Но тогда $b, a \in M_i$ и потому $(b, a) \in \mu$. Следовательно, μ симметрично.

Пусть $(a, b) \in \mu$ и $(b, c) \in \mu$. Тогда $\exists i, j \in I (a, b \in M_i \wedge b, c \in M_j)$. Ясно, что $b \in M_i \cap M_j$ и потому $M_i = M_j$. Так как $a, c \in M_i$, то $(a, c) \in \mu$, а значит отношение μ транзитивно. Таким образом, μ — рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение, то есть μ — отношение эквивалентности.

Пример 6. Пусть $M = \{a, b, c, d\}$. Легко видеть, что подмножества $\{a, b\}$, $\{c\}$ и $\{d\}$ образуют разбиение множества M . Очевидно, что из элементов подмножества $\{a, b\}$ можно составить такие пары: $(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)$; из элемента подмножества $\{c\}$ только одну пару (c, c) и аналогично для подмножества $\{d\}$ — пару (d, d) . Таким образом, бинарное отношение μ , определяемое данным разбиением, равно множеству $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$. Классы эквивалентных элементов: $\bar{a} = \{a, b\} = \bar{b}$, $\bar{c} = \{c\}$, $\bar{d} = \{d\}$, соответствующие этому бинарному отношению, образуют исходное разбиение.

1.5 Определение, примеры и виды отображений (соответствий, функций). Композиция отображений, её свойства

Определение. Функцией из множества A в множество B называется бинарное отношение $\varphi \subset A \times B$, удовлетворяющее условию:

$$\forall a \in A \forall b, c \in B ((a, b) \in \varphi \wedge (a, c) \in \varphi \Rightarrow b = c).$$

Пример 1. Пусть $A = B = R$, $\varphi_1 = \{(a, b) \mid b = a^2\}$.

Пример 2. Пусть $A = Z, B = R, \varphi_2 = \{(a, b) \mid b = \sqrt{a}\}$.

Пример 3. Пусть $A = N, B = R, \varphi_3 = \{(a, b) \mid b = \lg a\}$.

Если φ — функция из множества A в множество B , то множество $Dom \varphi$ называется областью определения функции φ , а множество $Im \varphi$ — областью значений функции φ . Заметим, что $Dom \varphi$ может не совпадать с A .

Определение. Отображением множества A в множество B называется функция φ из A в B , для которой $Dom \varphi = A$.

В предыдущих примерах функции φ_1 и φ_3 являются отображениями, функция φ_2 отображением множества Z не является, так как $Dom \varphi_2$ — множество всех неотрицательных целых чисел.

Не трудно заметить, что всякая функция φ является отображением множества $Dom \varphi$ в множество $Im \varphi$.

В этом пункте основное внимание будет уделено отображениям. Для обозначения отображений кроме малых греческих букв будем использовать и малые латинские буквы f, g, h и т.д.

Пусть f — отображение множества A в множество B . Если $(a, b) \in f$, то будем записывать $f(a) = b$ и называть b образом элемента a , а a — прообразом элемента b . Согласно определению отображения образ любого элемента a из A существует и определен однозначно.

Если $f(a) = b$, то говорят также, что элемент b соответствует элементу a при отображении f , а само f называют соответствием, при котором каждому элементу множества A соответствует только один элемент из множества B . Задание конкретного отображения f сводится к описанию способа нахождения образа $f(a)$ произвольного элемента a из A . Сам способ может быть описан либо словесно, либо таблицей, либо аналитическим выражением.

Определение. Отображение f множества A в множество B называется инъективным, если $\forall a_1, a_2 \in A (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$.

Определение. Отображение f множества A в множество B называется сюръективным, если $\forall b \in B \exists a \in A f(a) = b$.

В качестве примеров отображений рассмотрим некоторые элементарные функции. В этих примерах буквой f обозначено отображение множества A в множество B .

Пример 4. $A = B = R$ и $\forall x \in A f(x) = ax + b$, где $a, b \in R$ и $a \neq 0$.

Если $ax_1 + b = ax_2 + b$, то $x_1 = x_2$ и потому отображение f инъективно. Если $y \in R$, то

$$\frac{y-b}{a} \in R, \text{ и } f\left(\frac{y-b}{a}\right) = y.$$

Следовательно, отображение f сюръективно.

Пример 5. $A = B = R$ и $\forall x \in A f(x) = x^2$. Отображение f не инъективно, так как $f(-1) = 1 = f(1)$ и $1 \neq -1$. Отображение f не сюръективно, так как например, -1 не является образом никакого числа то есть $\forall x \in R x^2 \neq -1$.

Пример 6. A – множество всех неотрицательных действительных чисел, $B = R$ и $\forall x \in A f(x) = x^2$. Очевидно, что теперь f – инъективное, но не сюръективное отображение.

Пример 7. $A = R, B$ – множество всех неотрицательных действительных чисел и $\forall x \in A f(x) = x^2$. Ясно, что отображение f не инъективно, но сюръективно.

Пример 8. $A = B$ – множество всех неотрицательных действительных чисел и $\forall x \in A f(x) = x^2$. Отображение f инъективно и сюръективно.

Пример 9. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b\}, f = \{(1, a), (2, b), (3, a), (4, b)\}$. Легко видеть, что бинарное отношение f действительно является отображением множества A в множество B . Это отображение не инъективно, так как $1 \neq 3$ и $f(1) = a = f(3)$. Отображение f сюръективно, так как оба элемента a и b являются образами элементов из множества A .

Определение. Отображение называется биективным или взаимно однозначным, если оно инъективно и сюръективно.

Среди рассмотренных выше отображений биективными являются отображения в примерах 4 и 8. Другими примерами биективных отображений являются функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x \text{ для } A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } B = R,$$

$$f(x) = \operatorname{lg} x \text{ для } A = (0, \infty) \text{ и } B = R.$$

Определение. Единичным или тождественным отображением $I: X \rightarrow X$ называется отображение, переводящее каждый элемент $x \in X$ в себя.

Определение. Произведением или композицией двух отображений $g : A \rightarrow B$ и $f : B \rightarrow C$ называется отображение $f \circ g : A \rightarrow C$, определенное условием

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) \forall a \in A.$$

Вместо $f \circ g$ часто пишут просто fg .

Теорема. Композиция отображений подчиняется закону ассоциативности. Это значит, что если

$$h : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W, f : W \rightarrow T$$

три отображения, то

$$f(gh) = (fg)h.$$

Доказательство.

В соответствии с формальным определением равенства отображений нужно просто сравнить значения отображений

$$f(gh) : U \rightarrow T \text{ и } (fg)h : U \rightarrow T$$

в произвольном элементе $u \in U$:

$$(f(gh))(u) = f((gh)u) = f(g(hu)) = (fg)(hu) = ((fg)h)u.$$

Композиция отображений $X \rightarrow X$ некоммукативна, то есть $fg \neq gf$. В этом легко убедиться на примере, когда $X = \{a, b\}$, $f(a) = b, f(b) = a, g(a) = a, g(b) = a$.

1.6 Обратное отображение. Критерий обратимости отображения

Определение. Отображение f множества A в множество B называется обратимым, если обратное бинарное отношение f' является отображением множества B в множество A . В этом случае отображение f' называют обратным к отображению f и обозначают через f^{-1} .

Определим в каких из рассмотренных выше примерах параграфа 5 отображения обратимы. В первом примере отображение $f = \{(x, ax +$

$b) \mid x \in R\}$. Для того, чтобы записать обратное бинарное отношение, обозначим $ax + b$ через y . Тогда

$$x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a} = a'y + b',$$

где

$$a' = \frac{1}{a}, b' = -\frac{b}{a}.$$

Следовательно,

$$f' = \{(y, a'y + b') \mid y \in R\}.$$

Ясно, что f' — отображение множества R в множество R и потому f' — обратимое отображение. Отображение f в примерах 5 и 6 не обратимо, так как $\text{Dom } f' \neq B$. Отображение f в примере 7 не обратимо, так как $(1, 1) \in f'$ и $(1, -1) \in f'$ и потому бинарное отношение f' не является отображением. Отображение f в примере 8 обратимо, так как обратное бинарное отношение $f' = \{(y, \sqrt{y}) \mid y \in R \wedge y > 0\}$ является отображением множества всех неотрицательных действительных чисел в себя. Отображение f в примере 9 не обратимо, так как обратное бинарное отношение $f' = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3), (b, 4)\}$ не является отображением. Заметим, что отображение оказалось обратимым в тех случаях, когда оно было биективным. Такое совпадение не случайно. Имеет место теорема:

Теорема. Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно.

Доказательство.

Необходимость. Пусть f — обратимое отображение множества A в множество B . Это означает, что обратное бинарное отношение f' также является отображением. Следовательно, f' удовлетворяет двум условиям:

$$1) \forall b \in B \forall a, c \in A ((b, a) \in f' \wedge (b, c) \in f' \Rightarrow a = c)$$

и

$$2) \text{Dom } f' = B.$$

Из первого условия следует $(b = f(a) = f(c)) \Rightarrow a = c$, которая означает инъективность отображения f . Из второго условия следует, что $\forall b \in B \exists a \in A (b, a) \in f'$, а это означает сюръективность отображения f . Таким образом, f — биективное отображение.

Достаточность. Пусть f — биективное отображение множества A в множество B . Тогда f — инъективное отображение, то есть $\forall a, c \in A \forall b \in B (f(a) = b = f(c) \Rightarrow a = c)$. Это означает, что если $(b, a) \in f'$ и $(b, c) \in f'$, то $a = c$. Следовательно, f' — функция из B в A . По условию f — сюръективное отображение, то есть $\forall b \in B \exists a \in A f(a) = b$, а значит $(b, a) \in f'$. Это говорит о том, что $\text{Dom } f' = B$ и потому f' — отображение множества B в множество A . Таким образом, отображение f обратимо