

Лекция №1

Тема: Элементы теории комбинаторики

Определение: Соединение (выборка) – некоторый набор, составленный из элементов данного множества.

Основные правила комбинаторики

1. Правило суммы: если элемент А можно выбрать n способами, а элемент В можно выбрать m способами, то выбрать либо А, либо В можно $(n + m)$ способами.

2. Правило произведения (умножения): если элемент А можно выбрать n способами, а элемент В можно выбрать m способами, то два элемента (пару) А и В можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Типы соединений: 1) Перестановки; 2) Размещения; 3) Сочетания.

Определение: Перестановкой из n разных элементов называют соединение, которое состоит из n элементов, в котором установлен порядок. Перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения элементов. Обозначают P_n – число перестановок из n элементов

Вычисляют по формуле: $P_n = n!$; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$

Задача №1. Вычислить: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Задача №2. Сколькими способами можно посадить три дерева (дуб, березу, клен) в три подготовленные лунки?

Решение: $P_3 = 3! = 6$;

Определение: Размещением из n элементов по m ($m \leq n$) называется соединение, содержащее m элементов, взятых из данных n элементов в определенном порядке. Размещения из n элементов по m считаются различными, если они отличаются самими элементами или порядком их расположения. Обозначают: A_n^m (читается «А из n по m »)

Вычисляют по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Задача №3. Вычислить:

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 30$$

Задача №4. Из ящика, где находится 15 шаров, нумерованных последовательно от 1 до 15 требуется вынуть 3 шара. Определить число возможных комбинаций при этом?

Решение: $A_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = 2730$

Определение: Сочетанием из n элементов по m ($m \leq n$) называется любое соединение, составленное из m элементов, выбранных из данных n элементов. Сочетания из n по m отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, порядок элементов значения не имеет. Обозначают: C_n^m (читается «С из n по m »)

Вычисляют по формуле:
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Свойства сочетаний:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$
2. $C_n^n = C_n^0 = 1$
3. $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$

Задача №5. Вычислить:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$$

Задача №6: Сколькими различными способами можно избрать из 15 человек делегацию в составе 3 человек?

Решение: $C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!12!} = 455$

Лекция №2

Тема: Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона.

Треугольник Паскаля

Свойство №3 используют при построении треугольника Паскаля.

Определение: Эта таблица называется треугольником Паскаля, по имени известного французского математика Блеза Паскаля (1623-1662), исследовавшего его свойства.

$$C_0^0$$

$$C_1^0 \ C_1^1$$

$$C_2^0 \ C_2^1 \ C_2^2$$

$$C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3$$

$$C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & \\
 & & 1 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & \\
 & & & & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Определение: Для каждого натурального числа n и произвольных чисел a и b имеет место равенств:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Равенство называется формулой бинома Ньютона, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ и

$C_n^k, 0 < k < n$ называют биномиальными коэффициентами.

Формула Ньютона обладает следующими свойствами:

- 1) В разложении двучлена $(a+b)^n$ в формуле содержится $n+1$ член.
- 2) Сумма степеней всех одночленов равна степени двучлена n .
- 3) Степень первого выражения одночлена в разложении убывает, начиная со степени двучлена и заканчивая нулевой.
- 4) Степень второго выражения одночлена в разложении возрастает, начиная с нулевой и заканчивая степенью двучлена.
- 5) Биномиальные коэффициенты совпадают с числом соответствующей строки треугольника Паскаля.
- 6) Сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n

Задача №1: Представьте каждую степень двучлена в виде многочлена.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(c+a)^4 = c^4 + 4c^3a + 6c^2a^2 + 4ca^3 + a^4$$

$$(c+a)^5 =$$

$$(c+a)^6 =$$

Лекция № 3.

Тема: Элементы теории вероятностей.

Введение

Теория вероятностей зародилась и развивалась из потребностей практики:

- в начале XVII в. физик Галилей пытался подвергнуть научному исследованию ошибки физических изменений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности;
- в начале XVII в. были сделаны попытки в создании общей теории страхования, основанной на анализе закономерностей в таких массовых случайных явлениях, как заболеваемость, смертность, статистика несчастных случаев;
- схемы азартных игр дают исключительные по простоте и прозрачности модели случайных явлений.

В середине XVII в. исследования Б.Паскаля и П. Ферма в области теории азартных игр привели к возникновению современной теории вероятности. В настоящее время методы прикладной теории вероятности широко используются в таких дисциплинах, как «теория информации» и «теория массового обслуживания».

В самых разных областях практики возникла необходимость в решении своеобразных вероятностных задач, связанных с работой, так называемых систем массового обслуживания (телефонные станции, ремонтные мастерские, справочные бюро и т.п.). Каждая такая система обслуживания состоит из какого-то числа обслуживающих единиц, которые называются каналами обслуживания. Работа любой системы массового обслуживания состоит в выполнении поступающего, на неё потока требований или заявок. Каждая система массового обслуживания в зависимости от числа каналов и их производительности обладает какой-то пропускной способностью, позволяющей более и менее успешно справляться с потоком заявок. Чтобы дать рекомендации по рациональной организации системы, выяснить её пропускную способность и предъявить к ней требования, необходимо изучать случайный процесс системы и описать его математически.

Классификация событий

В настоящее время часто приходится иметь дело с событиями, которые при выполнении некоторых условий могут произойти, а могут и не произойти (событие - встать утром в 6 часов).

Определение: Испытанием или опытом называется совокупность условий, при которых рассматривается появления случайного события.

Определение: Событием называют результат опыта (опыт – стрельба по мишени, событие – «поражение» или «не поражение»)

События обозначаются прописными латинскими буквами: A, B, C .

Определение: Событие называется *случайным*, если оно может произойти, а может и не произойти (событие – «получить отлично на экзамене»).

Определение: Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет. Обозначается – U (Из ящика с белыми шарами событие – «вынуть белый шар»- U).

Определение: Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти. Обозначается – V (Из ящика с белыми шарами событие – «вынуть черный шар»- V).

Определение: Событие $\bar{A}$ называется *противоположным* событию A, если появление одного из них равносильно не появлению другого (A – «выигрыш на купленный лотерейный билет» и $\bar{A}$ – « не выигрыш на купленный лотерейный билет»).

Определение: Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого (A – «выпадение четного числа очков игральной кости» и B – «выпадение двойки на игральной кости»).

Определение: Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появления другого (A – «выпадение четного числа очков игральной кости» и B – «выпадение тройки на игральной кости»).

Определения теории вероятности

Классическое

Определение: Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа возможных исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех исходов, т.е. $P(A)=m/n$

(m – число благоприятствующих исходов, n – число неблагоприятствующих исходов)

Задача №1. Бросается игральный кубик. Какова вероятность выпадения четного числа?

Решение: A – «чётное число», $m=3$, $n=6$, $P(A)=3/6=0,5$

Задача №2. Какова вероятность того, что из букв «М» и «И» «Р», написанных на отдельных карточках получится слово «мир».

Решение: А – «слово - мир», вероятными случаями считаются любые расположения этих карточек в ряд, $n=3!=1*2*3=6$, $m=1$, $P(A)=1/6=0,16$

Статистическое

Классическое определение предполагает, что все исходы равновозможные (как в случае игральной кости или монеты). Такие задачи на практике встречаются довольно редко. Во многих случаях трудно указать равновозможность исходов. В связи с этим появилась необходимость появления статистического определения, основанного на таком понятии, как относительная частота события.

Определение: Относительной частотой $W(A)$ события А или частотой называется отношение числа опытов, в которых появилось это событие А к числу всех произведенных опытов, т.е. $W(A)=M/N$

(М – число опытов, в которых появилось это событие А, N - число всех произведенных опытов.

Задача №3. Среди 1000 новорождённых оказалось 420 мальчиков. Найти частоту рождения мальчиков?

Решение. А – «родился мальчик», $M=420$, $N=1000$,
 $W(A)=420/1000=0,42$

Некоторые свойства вероятности события

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(U)=1$
3. $P(V)=0$

Задача №4. Среди 170 деталей, оказалось 8 деталей, не отвечающих стандарту. Найдите вероятность выбора: 1) детали, не отвечающей стандарту, 2) детали, отвечающей стандарту (Ответ: 1) $P(A)=8/170=4/85$, 2) $P(A)=(170-8)/170=162/170=81/85$).

Задача №5. Из коробки, в которой находится 5 белых и 3 черных шара вынимают один шар. Найти вероятность того шар окажется: 1) черным, 2) белым (Ответ: 1) $P(A)=3/(3+5)=3/8$, 2) $P(A)=5/(3+5)=5/8$).

Лекция №2

Тема: Теорема сложения и умножения вероятностей событий.

Теорема сложения несовместных событий

Пусть дано несколько событий: А, В.

Определение: Событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них называется суммой этих событий и обозначается $A+B$.

Теорема: Вероятностью суммы двух несовместных событий A и B является сумма вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Задача №6. Консультационный пункт техникума получает пакеты с контрольными работами студентов из городов: A , B , C . Вероятность получения пакета из города A равна $0,7$, из города B - $0,2$. Какова вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C .

Решение: События A , B , C несовместные, т.к. контрольные работы из разных городов, предполагается, что контрольные должны прийти все, поэтому сумма вероятностей этих событий равна 1 , $P(C)=1-(P(A)+P(B))=1-0,7-0,2=0,1$.

Следствие: Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единицы. $P(A)+P(\bar{A})=P(U)=1$

Задача №7. Каждое из трёх несовместных событий A , B , C происходит с вероятностью $0,01$; $0,02$; $0,03$. Найти вероятность того, что в результате опыта не произойдёт ни одного события. (Ответ: $P(D)=1-(P(A)+P(B)+P(C))=1-(0,01+0,02+0,03)=0,94$).

Задача №8. В одной корзине 15 – красных яблок, 10 – жёлтых, 5 – зелёных. Какова вероятность, того что наудачу взятое яблоко окажется либо красным, либо зелёным. (Ответ: $P(A+C)=15/30+5/30=2/3$)

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Теорема: Вероятностью суммы двух совместных событий: A и B является сумма вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Задача №9. Найти вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число, окажется кратным либо 3 , либо 5 , либо тому и другому одновременно (всего двухзначных чисел 90 , из них 30 – кратных 3 , 18 – кратных 5 , 6 – кратных 3 и 5).

Решение: A – «число кратное 3 », B – «число кратное 5 », $P(A)=30/90=1/3$, $P(B)=18/90=1/5$, $P(AB)=1/3*1/5=1/15$, $P(A+B)=1/3+1/5-1/15=7/15$.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Пусть дано несколько событий A , B .

Определение: Произведением событий A и B называется такое событие AB , которое заключается в совместном наступлении этих событий.

Определение: Два события A и B называются зависимыми, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого.

Определение: Вероятность наступления одного события A при условии наступления другого события B называется условной вероятностью и обозначается $P_B(A)$.

Теорема: Вероятностью совместного наступления двух зависимых событий является произведение вероятности одного события на условную вероятность другого события:

$$P(AB)=P(A) \cdot P_B(A)=P(B) \cdot P_A(B)$$

Задача №10. Из коробки, в которой находится 8 белых и 5 черных шара вынимают два шара. Найти вероятность того оба шара окажутся: 1) черными.

Решение: A – «первый шар чёрный», B – «второй шар чёрный»,
 $P(A)=5/13$, $P_B(A)=4/12$, $P(AB)=5/13 \cdot 4/12=20/156=5/39$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Определение: Два события A и B называются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от наступления или не наступления другого, т.е. имеет место равенство: $P_B(A)=P(A)$ и $P_A(B)=P(B)$.

Теорема: Вероятностью совместного наступления двух независимых событий является произведение вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B)$$

Задача №11. В одном ящике находится 4 зеленых ручки и 8 синих, а в другом – 3 зеленых и 9 синих. Из каждого ящика вынули по ручки. Какова вероятность того, что обе ручки окажутся: 1) зелеными, 2) синими

Решение: A – «1 - зеленая ручка», B – «красная ручка»

1) $P(AB)=4/(4+8) \cdot 3/(4+8)=4/12 \cdot 3/12=12/144=1/12$

2) $P(AB)=8/(4+8) \cdot 9/(4+8)=8/12 \cdot 9/12=2/3 \cdot 3/4=6/12=1/2$

Задача №12. Рабочий обслуживает два станка, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что в течении часа первый станок не потребует внимания рабочего, равно 0,8, а для второго 0,7. Найдите вероятность того, что в течение часа не один станок не потребует внимания рабочего. (Ответ: $P(AB)=0,8 \cdot 0,7=0,56$).

Лекция №3

Тема: Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Формула полной вероятности

Известна полная группа событий: $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ попарно несовместных. Требуется определить вероятность некоторого события A , которое может произойти с одним из событий из группы, тогда:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Вероятность наступления события A равна сумме произведений каждого события из этой группы на соответствующую условную вероятность события A .

Задача №13. В магазин поступила новая продукция с трёх предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% - продукция первого предприятия высшего сорта, на втором – 5%, на третьем – 20%. Найти вероятность того, что случайно купленная продукция окажется высшего сорта.

Решение: A – «продукция высшего сорта», B_1, B_2, B_3 – «продукция принадлежащая соответствующим предприятиям»,
 $P(A) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,02 + 0,015 + 0,1 = 0,135$ или 13,5%

Задача №14. На предприятии изготавливают изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 30% изделия, на втором – 25%, на третьем – остальная часть продукции. Каждая линия характеризуется процентами годности изделий: 97%, 98%, 96%. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным (Ответ: $P(A) = 0,3 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,02 + 0,45 \cdot 0,04 = 0,032$ или 3,2%)

Формула Байеса

Известна полная группа событий $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ попарно несовместных. Произведен опыт в результате, которого появилось событие A . Следует выяснить как часто будут появляться события $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ среди опытов, в которых события A происходит, следует найти условную вероятность каждого события из группы, тогда:

$$P_A(B_i) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) / P(A)$$

Задача №15. На склад поступает продукция из трёх фабрик, причем продукция первой фабрики составляет - 20%, второй – 46%, третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики

равен - 3%, для второй – 2%, третьей – 1%. Найдите вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

Решение: A – «нестандартное изделие», B_1, B_2, B_3 – «изделия, принадлежащие соответствующим фабрикам», $A(B_1)$ – «нестандартное изделие первой фабрики»,
 $P_A(B_1)=0,2*0,03/(0,2*0,03+0,46*0,02+0,34*0,01)=0,32$ или 32%

Задача №16. В первом ящике имеются 8 белых и 6 черных шаров, а во втором 10 белых и 4 черных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что выбранный шар черный. Найти вероятность того, что был выбран первый ящик (Ответ: A – «черный шар», B_1, B_2 – соответствующие ящики, $P_A(B_1)=6/14*1/2/(6/14*1/2+4/10*1/2)=3/5$)

Практические задания по теории вероятностей

1. Отдел технического контроля обнаружил 15 бракованных ламп в партии из случайно отобранных 200 ламп. Найти относительную частоту появления бракованных ламп.
2. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,8. найти число годных приборов, если всего было проверено 250 приборов.
3. В урне 2 зеленых, 7 красных, 5 коричневых и 10 белых шаров. Какова вероятность появления цветного шара?
4. Лена и Саша играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. В сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что Лена выиграла.
5. В НИИ работает 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60 - немецкий, а 50- знают оба. Какова вероятность того, что выбранный наудачу сотрудник не знает ни одного иностранного языка?
6. На складе находятся 26 деталей из которых 13 стандартные. Рабочий берет наугад две детали. Пользуясь теоремой умножения вероятностей зависимых событий определить вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.
7. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
8. Два стрелка стреляют по цели одновременно. Вероятность попадания 1 стрелка 0,4, вероятность попадания 2 стрелка 0,5. Какова вероятность того, что оба стрелка не попадут в цель?