

Занятие № 1. Задачи на составление дифференциальных уравнений

§12. Геометрические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

При решении геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений удобно, исходя из условий задачи, сделать сначала чертеж, обозначить через $y = f(x)$ искомую кривую, а через $M(x, y)$ – произвольную точку этой кривой. Затем, выразив все входящие в задачу величины через x , y и y' , записать зависимость между ними в виде дифференциального уравнения. При этом в большинстве случаев используется, как правило, геометрический смысл производной ($y' = \operatorname{tg} \alpha$, где α есть угол, образованный касательной к кривой в точке $M(x, y)$ с положительным направлением оси Ox). В тех случаях, когда ищется кривая по свойству ее касательной, общему для всех точек этой кривой, наибольший эффект часто достигается, если использовать уравнение касательной в точке $M(x, y)$:

$$Y - y = y' \cdot (X - x), \quad (12.1)$$

где X, Y – текущие координаты касательной. В общем случае уравнение (12.1), с использованием условий задачи, легко приводится к уравнению Клеро, особое решение (огibaющая) которого и будет, как правило, искомой интегральной кривой.

Задача 12.1. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в n раз меньшую абсциссы точки касания ($n > 1$).

Решение. Сделаем рисунок (см. Рис. 12.1):

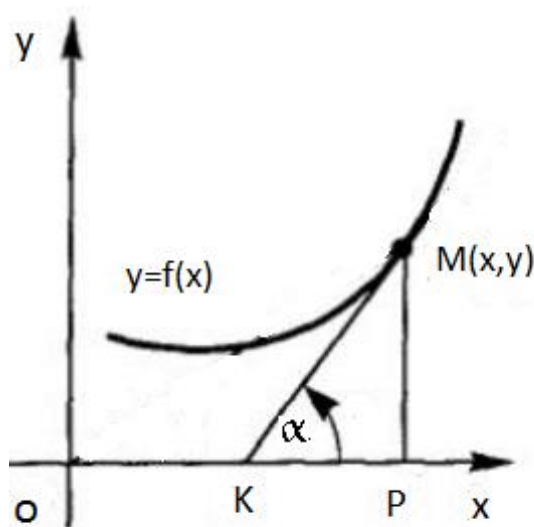


Рис. 12.1.

Пусть $y = f(x)$ есть уравнение одной из искомых кривых и $M(x, y)$ – произвольная точка, лежащая на ней. Обозначим через α угол, образованный

касательной в точке $M(x, y)$ с положительным направлением оси Ox . Из прямоугольного треугольника ΔKPM получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|MP|}{|KP|}. \quad (12.1)$$

Выразим величины, входящие в равенство (12.1), через x , y и y' . Имеем (см. рис. 12.1): $|OP| = x$, $|MP| = y$, $\operatorname{tg} \alpha = y'$ (в силу геометрического смысла

производной) и $|KP| = \frac{n-1}{n} \cdot x$, так как по условию задачи $|OK| = \frac{1}{n} \cdot x$. Подставляя в (12.1), получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$y' = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{y}{x}. \quad (12.2)$$

Разделяя переменные и интегрируя, из (12.2) имеем:

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{n}{n-1} \int \frac{dx}{x},$$

откуда $y = C \cdot x^{\frac{n}{n-1}}$ – общее решение дифференциального уравнения (12.2).

Ответ: $y = C \cdot x^{\frac{n}{n-1}}$, C – произвольная постоянная.

Замечание 12.1. Если в задаче 12.1 точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в 2 раза меньшую абсциссы точки касания, то в ответе получим $y = C \cdot x^2$ – семейство парабол (см. [10, с. 9]).

Рассмотрим теперь аналогичную задачу.

Задача 12.2. *Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в 2 раза большую абсциссы точки касания.*

Решение. Сделаем рисунок (см. Рис. 12.2):

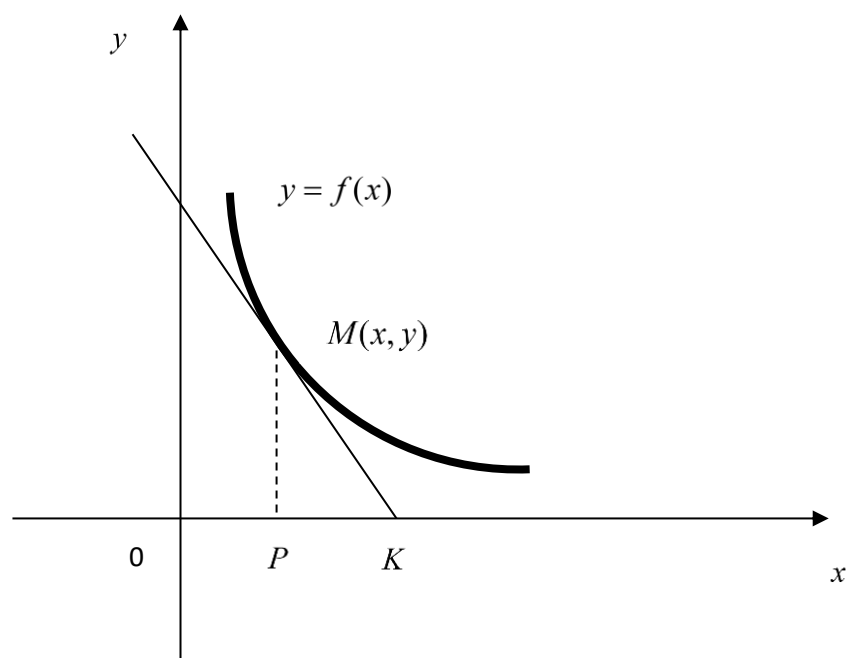


Рис. 12.2.

Пусть $y = f(x)$ есть уравнение одной из искомых кривых и $M(x, y)$ – произвольная точка, лежащая на ней. Обозначим через α угол, образованный касательной в точке $M(x, y)$ с положительным направлением оси Ox . Тогда угол $\angle MKP = \pi - \alpha$. Из прямоугольного треугольника ΔKPM получаем:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{|MP|}{|PK|}. \quad (12.3)$$

Выразим величины, входящие в (12.3), через x , y и y' . Имеем (см. рис. 12.2): $|OP| = x$, $|MP| = y$, $\operatorname{tg} \alpha = y'$ (в силу геометрического смысла производной) и $|PK| = x$, так как по условию задачи $|OK| = 2x$. Подставляя в (12.1), с учетом, что $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$-y' = \frac{y}{x}. \quad (12.4)$$

Разделяя переменные и интегрируя, из (12.4) имеем:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x},$$

откуда $y = \frac{C}{x}$ – общее решение дифференциального уравнения (12.4).

Ответ: $y = \frac{C}{x}$ – семейство гипербол, где C – произвольная постоянная.

Замечание 12.2. Интересно отметить, что при $n = \frac{1}{2}$ ответы задач 12.1 и 12.2 совпадают. Анализ решения задачи 12.1 показывает, что задача 12.2 допускает обобщение на случай, когда точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в n раз большую абсциссы точки касания.

Задача 12.3. *Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.*

Решение. Сделаем рисунок (см. Рис 12.2). Пусть $y = f(x)$ есть уравнение одной из искомых кривых и $M(x, y)$ – произвольная точка, лежащая на ней. Обозначим через X, Y текущие координаты касательной. Тогда уравнение касательной в точке $M(x, y)$ имеет вид:

$$Y - y = y' \cdot (X - x) \quad (12.5)$$

По условию задачи, площадь трапеции $S_{OPMB} = 3a^2$, т.е.

$$\frac{|OB| + y}{2} \cdot |OP| = 3a^2. \quad (12.6)$$

Выразим величины $|OB|$ и $|OP|$ через x, y и y' . Подставляя в (12.5) координаты $Y = |OB|, X = 0$ точки B , имеем:

$$|OB| - y = -xy' \quad \text{или} \quad |OB| = y - xy' \quad (12.7)$$

Подставляя (12.7) в (12.6) и учитывая, что $|OP| = x$ (см. рис. 12.2), получим:

$$\frac{y - xy' + y}{2} x = 3a^2,$$

откуда имеем линейное уравнение первого порядка

$$y' - \frac{2}{x} \cdot y = -6 \frac{a^2}{x^2}. \quad (12.8)$$

1). Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y' - \frac{2}{x} \cdot y = 0. \quad (12.9)$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x} + C_1,$$

откуда

$$\ln|y| = 2 \cdot \ln|x| + \ln C \quad \text{или} \quad y = C \cdot x^2.$$

2). Общее решение неоднородного уравнения (12.8) найдем методом вариации постоянной, т.е. будем искать его в виде:

$$y = C(x) \cdot x^2. \quad (*)$$

Подставляя (*) в (12.8), имеем

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = -6\frac{a^2}{x^2},$$

откуда $C'(x) = -6\frac{a^2}{x^4}$ и, значит, $C(x) = 2a^2 \cdot x^{-3} + C$.

Подставляя в (*), получаем

$$y = C \cdot x^2 + \frac{2a^2}{x} - \text{общее решение уравнения (12.6)}$$

Ответ. Искомые кривые определяются уравнением

$$y = C \cdot x^2 + \frac{2a^2}{x}, \quad \text{где } C - \text{произвольная постоянная.}$$

Задача 12.4. Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник площади $2a^2$.

Решение. Сделаем рисунок (см. выше рис. 12.2). Пусть $y = f(x)$ есть уравнение искомой кривой и $M(x, y)$ – произвольная точка этой кривой. Уравнение касательной в точке (12.5). По условию задачи

$$\frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = 2a^2. \quad (12.10)$$

Выразим величины $|OA|$ и $|OB|$ через x , y и y' .

Подставляя в (12.5) координаты $X = |OA|$, $Y = 0$ точки A , имеем $-y = y'(|OA| - x)$ или $|OA| = x - \frac{y}{y'}$. (12.11)

Аналогично, подставляя в (12.5) координаты $X = 0$, $Y = |OB|$ точки B , имеем

$$|OB| - y = y' \cdot (-x) \quad \text{или} \quad |OB| = y - x \cdot y'. \quad (12.12)$$

Учитывая равенства (12.11), (12.12), из (12.10) получаем

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right) \cdot (y - xy') = 4a^2,$$

или, раскрывая скобки и группируя,

$$-\frac{y^2}{y'} + 2xy - x^2y' = 4a^2,$$

откуда

$$y^2 - 2xy'y + x^2y'^2 + 4a^2y' = 0. \quad (12.13)$$

Решая квадратное уравнение (12.13), находим y :

$$y = xy' \pm \sqrt{x^2y'^2 - x^2y'^2 - 4a^2y'}$$

или

$$y = xy' \pm 2a\sqrt{-y'} - \text{уравнение Клеро.} \quad (12.14)$$

Решим уравнение (12.14) методом введения параметра. Положим $y' = P$.

Тогда (12.4) примет вид:

$$y = xP \pm 2a\sqrt{-P} \quad (12.15)$$

Нас интересует особое решение уравнения Клеро (12.14), т.е. огибающая (именно она и является искомой кривой). Оно получается путем исключения параметра P из системы (см. замечание 5.1):

$$\begin{cases} y = xP + \varphi(P) \\ x = -\varphi'(P). \end{cases}$$

Поскольку в данном случае $\varphi(P) = \pm 2a\sqrt{-P}$, $\varphi'(P) = \pm \frac{a}{\sqrt{-P}}$, то, решая систему

$$\begin{cases} y = xP + \pm 2a\sqrt{-P} \\ x = \pm \frac{a}{\sqrt{-P}} \end{cases}$$

получаем $\sqrt{-P} = \pm \frac{a}{x}$ и, следовательно,

$$y = \pm \frac{a}{\sqrt{-P}} P \pm 2a\sqrt{-P} = \pm \frac{a}{\sqrt{-P}} (P - 2P) = \pm \frac{aP}{\sqrt{-P}} = \pm a\sqrt{-P} = \pm \frac{a^2}{x},$$

так как $\frac{P}{\sqrt{-P}} = -\sqrt{-P}$. Поскольку

$$\varphi''(P) = \left(\pm \frac{a}{\sqrt{-P}} \right)' = \pm a \left(-\frac{1}{2} (-P)^{-\frac{3}{2}} (-1) \right) = \pm \frac{a}{2P \cdot \sqrt{-P}}$$

сохраняет знак, то $y = \pm \frac{a^2}{x}$ есть особое решение (см. Замечание 5.1).

Ответ: $y = \pm \frac{a^2}{x}$.

Замечание 12.3. Задачу 12.4 можно решить и другим методом, используя вместо уравнения касательной (12.5) уравнение прямой (касательной) в отрезках (см. книгу В.В. Степанова [9], глава III, §3).

Задачи 12.1.

1). Найти такую кривую, проходящую через точку (0,1), чтобы тангенс угла наклона касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной в два раза.

2). Найти такую кривую, проходящую через точку (0,-2), чтобы тангенс угла наклона касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной в три раза.

3). Найти такую кривую, проходящую через точку (0,-1), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на две единицы.

4). Найти такую кривую, проходящую через точку (0,-2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на три единицы.

5). Найти такие кривые, проходящую через точку (-1,1), для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в два раза большую абсциссы точки касания.

6). Найти такие кривые, проходящую через точку (1,2), для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в два раза большую абсциссы точки касания.

Ответы к упражнениям § 12

Задачи 12.1.

1). $y = e^{2x}$; Указание: $y' = 2y$, $y(0) = 1$.

2). $y = -2e^{3x}$; Указание: $y' = 3y$, $y(0) = -2$.

3). $y = e^x - 2$; Указание: $y' = y + 2$, $y(0) = -1$.

4). $y = e^x - 3$; Указание: $y' = y + 3$, $y(0) = -2$.

5). $y = x^2$ и $y = -\frac{1}{x}$. 6). $y = 2x^2$ и $y = \frac{2}{x}$.

§13. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

К дифференциальным уравнениям приводят не только геометрические задачи, но и многие другие задачи естествознания и техники. Многие физические законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются в виде дифференциального уравнения, выражающего определенную зависимость между величинами, характеризующими эти явления. Такими величинами могут служить, например, время, расстояние, скорость и ускорение (как известно, изменение расстояния S со временем t определяется скоростью $v = S'(t)$, а изменение скорости v со временем t определяется ускорением

$a = v'(t) = S''(t)$). С приложениями общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений (первого и высших порядков) к задачам инженерно-технического характера студент может ознакомиться по учебникам [1], [6], в которых имеется большое число примеров с подробными решениями и всесторонним анализом.

При решении физических задач, приводящихся к дифференциальным уравнениям, рекомендуется использовать следующую последовательность действий:

1. Выяснить, какому закону подчиняется рассматриваемый процесс (например, второму закону Ньютона).

2. Решить, что выбрать за независимую переменную (например время t) и что выбрать за искомую функцию (например, путь $S = S(t)$).

3. Выразить все фигурирующие в задаче величины через выбранные переменные (например, t, S, S'), используя при этом физический смысл производной (например, как скорость изменения переменной S).

4. Исходя из условий задачи и на основании физического закона, которому подчиняется данный процесс, составить дифференциальное уравнение.

5. Найти общее решение или общий интеграл полученного уравнения.

6. Определить начальные условия (например, $S(0) = S_0$), согласно условиям рассматриваемой физической задачи.

7. Из общего решения или общего интеграла выделить искомое решение, удовлетворяющее начальным условиям.

Задача 13.1. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 минут падает от 100^0 до 60^0 . Температура воздуха равна 20^0 . Через сколько времени от момента охлаждения температура хлеба понизится до

1) 40^0 ?

2) 30^0 ?

Решение. Обозначим через S температуру хлеба. По условию задачи она зависит от времени t , т.е. $S = S(t)$. Так как, в силу закона Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, то получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot (S - 20), \quad (13.1)$$

где k есть коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные, из (13.1), имеем $\frac{dS}{S-20} = k \cdot dt$, откуда в результате интегрирования находим

$$\ln|S - 20| = k \cdot t + \ln 20 \quad \text{или} \quad S - 20 = C \cdot e^{k \cdot t}.$$

По условию задачи при $t = 0$ имеем $S = 100$. Поэтому из предыдущего равенства можно легко найти C :

$$100 - 20 = C \cdot e^0, \quad \text{т.е.} \quad C = 80.$$

Следовательно,

$$S - 20 = 80 \cdot e^{k \cdot t}, \quad (13.2)$$

По условию задачи при $t = 20$ имеем $S = 60$. Поэтому из (13.2), имеем

$$60 - 20 = 80 \cdot e^{k \cdot 20}, \quad \text{т.е.} \quad e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Таким образом, из (9.2), окончательно получаем

$$S - 20 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}. \quad (13.3)$$

Из формулы (9.3) при $S = 40$ находим $t = 40$, а при $S = 30$ находим $t = 60$.

Ответ: Температура хлеба понизится до 40^0 через 40 минут, а до 30^0 через 60 минут.

Задача 13.2. Катер двигался по озеру со скоростью 32 км/ч и через 1 минуту, после того как был выключен двигатель, его скорость стала равной 8 км/ч. Чему будет равна скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера? Какое расстояние он пройдет через 1 минуту после выключения мотора? Какое расстояние он пройдет через 2 минуты после выключения мотора?

Решение. Пусть v – скорость движения катера, а k – коэффициент пропорциональности. По условию задачи, на движущийся катер действует сила $F = -k \cdot v$. С другой стороны, по второму закону Ньютона, эта сила $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$, где m – масса, а $\frac{dv}{dt}$ – ускорение. Следовательно,

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v \quad (13.4)$$

есть дифференциальное уравнение, описывающее движение катера. Разделяя переменные и затем интегрируя из (13.4), получим

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \cdot dt ,$$

$$\ln|v| = \ln e^{-\frac{k}{m}t} + \ln C .$$

Значит, общее решение дифференциального уравнения (13.4) имеет вид:

$$v = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} . \quad (13.5)$$

Так как в момент времени $t = 0$ сек скорость катера была $v = 32$ км/ч, а через одну минуту, т.е. при $t = 1 \text{ мин} = \frac{1}{60}$ ч она была $v = 8$ км/ч, то из общего решения (13.5), получаем:

$$32 = C \quad \text{и} \quad 8 = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{60}} .$$

Значит,

$$C = 32 \quad \text{и} \quad 8 = 32 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{60}} , \text{ т.е. } 4^{-1} = e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{60}} \quad \text{или} \quad e^{-\frac{k}{m}} = 4^{-60} .$$

Подставив в (13.5), имеем

$$v = 32 \cdot 4^{-60t} . \quad (13.6)$$

При $t = 2 \text{ мин} = \frac{1}{30}$ ч, из (13.6) получим

$$v = 32 \cdot 4^{-60 \cdot \frac{1}{30}} = 32 \cdot 4^{-2} = 2 .$$

Таким образом, скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя будет равна 2 км/ч.

Обозначим через S расстояние, которое катер будет проходить после остановки двигателя. Очевидно, что оно зависит от времени t , т.е. $S=S(t)$, и в момент $t = 0$ остановки двигателя $S(0) = 0$. Так как, в силу физического смысла, скорость есть производная пути по времени, то используя формулу (13.6), имеем

$$S' = 32 \cdot 4^{-60t} ,$$

откуда интегрируя, с учетом, что $S(0) = 0$, получаем

$$S = \int_0^t 32 \cdot 4^{-60x} dx = -\frac{32}{60} \int_0^t 4^{-60x} d(-60x) =$$

$$= -\frac{8}{15 \ln 60} \Big|_0^t = \frac{8}{15 \cdot \ln 60} [1 - 4^{-60t}].$$

Так как $\ln 60 = 4,094344562 \dots$, то для простоты вычислений можно считать $\ln 60 = 4$. Поэтому, из предыдущего равенства окончательно получаем:

$$S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-60t}]. \quad (13.7)$$

При $t = 1 \text{ мин} = \frac{1}{60} \text{ ч}$ из (13.7), имеем

$$S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-1}] = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{10} \text{ (км)},$$

т.е. через минуту после остановки двигателя катер пройдет 100 метров.

При $t = 2 \text{ мин} = \frac{1}{30} \text{ ч}$ из (13.7), имеем

$$S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-2}] = \frac{2}{15} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{8} \text{ (км)},$$

т.е. через 2 минуты после остановки двигателя катер пройдет 125 метров.

Ответ: Через 2 минуты после остановки двигателя скорость катера будет 2 км/ч. и он пройдет расстояние 125 метров, а через 1 минуту он пройдет расстояние 100 метров.

Замечание 12.3. Если воспользоваться хорошо известной формулой $S = v \cdot t$, где v определяется по формуле (13.6), то она привела бы к ошибочным парадоксальным результатам: через минуту пройденной после остановки двигателя расстояние равнялось бы $\frac{2}{15}$ км, а через 2 минуты равнялось бы $\frac{1}{15}$ км, т.е. с увеличением времени пройденное расстояние уменьшилось бы, что невозможно. Здесь нужно обратить внимание, что формула $S = v \cdot t$ справедлива для равномерного движения и в данном случае не применима.

Задача 13.3. Мяч весом 200 грамм брошен вверх со скоростью 20 м/с. Известно, что на мяч, летящий со скоростью 1 м/с, воздух оказывает сопротивление 5Н. Считая ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$ найти наибольшую высоту подъема мяча.

Решение. Пусть $v = v(t)$ есть скорость мяча в момент времени t , $F_g = mg$ есть сила тяжести (направленная вниз). Известно, что сила сопротивления воздуха F_s пропорциональна квадрату скорости, а именно $F_s = \mu \cdot m \cdot v^2$. Так как, по условию, $m = 200 \text{ г}$ и $F_s = 5 \text{ Н}$, если $v = 1 \text{ м/с}^2$, то подставляя в предыдущую формулу эти значения, имеем $5 = \mu \cdot 200$ и, значит, $\mu = 0,025$. Следовательно, $F_s = 0,025 \cdot m \cdot v^2$. В силу второго закона Ньютона $m \cdot a = -F_g - F_s$ или $m \cdot v' = -10 \cdot m - 0,025 \cdot m \cdot v^2$ или

$$v' = -10 - 0,025 \cdot v^2.$$

Разделяя переменные и затем интегрируя, получаем

$$\int \frac{dv}{0,025 \cdot v^2 + 10} = - \int dt \quad \text{или} \quad 40 \int \frac{dv}{v^2 + 20^2} = - \int dt,$$

откуда

$$2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{v}{20} = -t + C \quad \text{или} \quad v = 20 \cdot \operatorname{tg} \frac{C - t}{2}. \quad (13.8)$$

Так как, по условию, $v(0) = 20$, то из предыдущего равенства при $t = 0$

получаем: $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1$ и, значит, $C = \frac{\pi}{2}$.

Наивысшей точки мяч достигает в тот момент времени t , когда его

скорость v равна нулю. Согласно формуле (13.8) это произойдет при $t = C = \frac{\pi}{2}$.

. Следовательно, наибольшую высоту h можно найти как расстояние,

пройденное мячом за промежуток времени от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$\begin{aligned} h &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t) dt = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \frac{\frac{\pi}{2} - t}{2} dt = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) dt = \\ &= 20 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right)} dt = 40 \cdot \ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 40 \cdot \ln \sqrt{2} \approx 1386. \end{aligned}$$

Ответ: 13м 86см.

Задачи 13.1.

1). Под действием сопротивления воды лодка за 1 минуту замедлила своё движение по озеру с 6 до 1 км/ч. Какое расстояние пройдет лодка до полной остановки?

2). Под действием сопротивления воды лодка за 10 минут замедлила своё движение по озеру с 36 до 1 км/ч. Какое расстояние пройдет лодка до полной остановки?

3). Тело охладилось за 10 минут от 100^0 до 60^0 (по Цельсию). Температура окружающей среды равна 20^0 . Сколько времени ещё понадобится, чтобы температура тела стала 30^0 ?

4). Тело охладилось за 10 минут от 70^0 до 40^0 (по Цельсию). Температура окружающей среды равна 25^0 . Сколько времени ещё понадобится, чтобы температура тела стала 30^0 ?

5). Мяч весом 400 грамм брошен вверх со скоростью 20 м/с. Известно, что на мяч, летящий со скоростью 1 м/с, воздух оказывает сопротивление 5Н. Считая ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$ найти наибольшую высоту подъема мяча.

6). Мяч весом 500 грамм брошен вверх со скоростью 20 м/с. Известно, что на мяч, летящий со скоростью 1 м/с, воздух оказывает сопротивление 5Н. Считая ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$ найти наибольшую высоту подъема мяча.

Ответы к упражнениям § 13

Задачи 13.1.

$$S = \int_0^{\infty} v(t) dt = \int_0^{\infty} 6^{1-60t} dt, \quad \ln 6 \approx 1,7916.$$

1). 55м 81см; Указание:

$$S = \int_0^{\infty} v(t) dt = \int_0^{\infty} 36^{1-6t} dt, \quad \ln 36 \approx 3,5835.$$

2). 1км 674м; Указание:

$$T' = -k(T - 20), T(0) = 100, T(10) = 60$$

3). 20 минут; Указание:

$$T' = -k(T - 25), T(0) = 70, T(10) = 40$$

4). 10 минут; Указание:

5). 16м 22см.; Указание: см. решение задачи 13.3.

6). 17м 84см.; Указание: см. решение задачи 13.3.

§14. Экономические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Математические методы с успехом используются не только в физике, химии, биологии, медицине и других естественных науках, но и в социальных науках и, в особенности, в экономике, причем на разных уровнях – микроэкономическом, и макроэкономическом. К задачам микроэкономического уровня относится, например, подсчет денежной суммы на счету клиента, разместившего вклад в банке под определенные проценты, а к задачам макроэкономического уровня относится, например, установление взаимосвязи между государственным доходом и государственным долгом и вычисление общей суммы долга.

Прежде чем приступить к решению этих задач, напомним некоторые определения и приведем необходимые формулы.

Рассмотрим процесс возрастания денежной суммы, положенной в банк при условии начисления $100p\%$, т.е. при условии начисления *сложных* (или *накопительных*) процентов в год. Под сложными (или накопительными) процентами понимаются проценты, насчитываемые не только на первоначальную сумму, но и на проценты, уже наращенные на величину этой суммы за предыдущий срок.

Пусть S_0 обозначает начальную денежную сумму на счету клиента, а S_x — денежную сумму по истечении x лет. Если проценты начисляются один раз в год, то значения S_x вычисляются по рекуррентной формуле [8]:

$$S_{x+1} = S_x + p \cdot S_x, \quad (14.1)$$

где $x = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Например, если начальная сумма на счету клиента была $S_0 = 100000$ рублей и $100p\% = 11\%$, то подставляя $x = 0$ и $p = 0,11$ из формулы (14.1) получим: $S_1 = 100000 + 0,11 \cdot 100000 = 111000$, т.е. через год на счету клиента будет 111000 рублей.

В общем случае, если проценты начисляются n раз в год и x принимает последовательно значения $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$, то

$$S_{x+1/n} = S_x + \frac{p}{n} \cdot S_x. \quad (14.2)$$

Обозначим $\frac{1}{n} = \Delta x$. Тогда из (14.2), имеем

$$S_{x+\Delta x} - S_x = p \cdot \Delta x \cdot S_x \quad \text{или} \quad \frac{S_{x+\Delta x} - S_x}{\Delta x} = p \cdot S_x.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем:

$$S'_x = p \cdot S_x \quad \text{или} \quad \frac{dS_x}{dx} = p \cdot S_x \quad \text{или} \quad \frac{dS_x}{S_x} = p \cdot dx,$$

т.е. получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными. Интегрируя обе части этого уравнения, имеем

$$\ln |S_x| = p \cdot x + \ln C \quad \text{или} \quad S_x = C \cdot e^{px}.$$

Полагая в последнем равенстве $x = 0$, находим, что $C = S_0$.

Таким образом, закон возрастания денежной суммы на счету в банке выражается формулой:

$$S_x = S_0 e^{px}. \quad (14.3)$$

Как правило, проценты начисляются дискретно, т.е. в конце каждого временного промежутка. Если предположить, что начисление процентов происходит *непрерывно*, то формула (14.3) будет справедлива и в этом случае (см., например, [3, глава 3]).

Рассмотрим практическое применение формулы (14.3) на конкретных примерах:

Пример 14.1. Ставка по вкладу в коммерческом банке составляет 10% в год. Какое количество денег будет на счету вкладчика через два года, при условии начисления сложных процентов в год, если на его счету 100 тысяч рублей?

Решение. Воспользуемся формулой (14.3). Подставляя в эту формулу $S_0 = 100000$, $p = 0,1$ и $e \approx 2,718$ (напомним, что $e = 2,718281828 \dots$), имеем $S_2 \approx 100000 \cdot 2,718^{0,2} \approx 100000 \cdot 1,2213774 = 122138$ (рублей) с точностью до одной копейки.

Ответ: 122138 рублей.

Замечание 14.1. Если бы проценты начислялись один раз в год, то по формуле (14.1) (т.е. при условии начисления *простых* процентов) мы бы

$$S_2 = 110000 + 0,1 \cdot 110000 = 121000 \text{ (рублей),}$$

т.е. доход составил бы 21000 рублей, вместо дохода в 22138 рублей при условии начисления сложных процентов, как в примере 14.1.

Пример 14.2. *Через сколько лет произойдет удвоение уровня цен при ежегодной инфляции в 6% в год?*

Решение. Так как в период инфляции увеличение цен происходит постоянно, то можно воспользоваться формулой (14.3). Если S_x это уровень цен в момент времени x , то по формуле (14.3), имеем:

$$S_x = S_0 e^{0,06x}.$$

Так как в момент удвоения цен $S_x = 2S_0$, то

$$2S_0 = S_0 e^{0,06x} \quad \text{или} \quad e^{0,06x} = 2 \quad \text{или} \quad 0,06x = \ln 2 = 0,693 \dots,$$

откуда $x = 11,552$ (лет).

Ответ: 11,5 лет.

Пример 14.3. *Найти зависимость роста национального дохода Y и национального долга D от времени t при условии, что они возрастают прямо пропорционально доходу с коэффициентами k и q , соответственно.*

Решение. По условию национальный доход $Y = Y(t)$ и дефицит в расходах $D = D(t)$ возрастают со скоростью прямо пропорциональной доходу, поэтому:

$$Y' = k \cdot Y, \quad (14.4)$$

$$D' = q \cdot Y, \quad (14.5)$$

где k и q – положительные числа.

Уравнения (14.4) и (14.5) представляют собой дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и затем интегрируя, из (14.4) получим:

$$\ln |Y| = k \cdot t + \ln C \quad \text{или} \quad Y = C \cdot e^{kt}. \quad (14.6)$$

Обозначим через $Y_0 = Y(0)$ величину дохода в момент времени $t = 0$. Тогда из (14.6), полагая $t = 0$, имеем $C = Y_0$.

Итак, национальный доход $Y = Y(t)$ возрастает со временем согласно формуле:

$$Y = Y_0 \cdot e^{kt}. \quad (14.7)$$

Подставив (14.7) в (14.5), получим

$$D' = q \cdot Y_0 \cdot e^{kt}.$$

Разделяя переменные и затем интегрируя, получим

$$D = q \cdot Y_0 \cdot \int e^{kt} dt = \frac{q}{k} \cdot Y_0 \cdot e^{kt} + C. \quad (14.8)$$

Обозначим через $D_0 = D(0)$ величину национального долга в момент времени $t = 0$.

$$\text{Тогда из (14.8), полагая } t = 0, \text{ имеем } C = D_0 - \frac{q}{k} \cdot Y_0.$$

Итак, в силу равенства (14.8), национальный долг возрастает со временем согласно формуле

$$D = \frac{q}{k} \cdot Y_0 \cdot e^{kt} + D_0 - \frac{q}{k} \cdot Y_0 = D_0 + \frac{q}{k} \cdot Y_0 \cdot (e^{kt} - 1).$$

$$\text{Ответ: } Y = Y_0 \cdot e^{kt}, D = D_0 + \frac{q}{k} \cdot Y_0 \cdot (e^{kt} - 1).$$

Пример 14.4. *Какая сумма будет на счету в банке через 20 лет, если открыть счет в 10 тысяч рублей под 5% годовых с непрерывным начислением процентов?*

Решение. Воспользуемся формулой (14.3). Подставляя в эту формулу $S_0 = 10000$, $p = 0,05$ и $e \approx 2,718$, имеем

$$S_{20} \approx 10000 \cdot 2,718^{0,05 \cdot 20} = 10000 \cdot 2,718 = 27180 \text{ (рублей)}$$

Ответ: 27 тысяч 180 рублей.

Задачи 14.1.

1). Ставка по вкладу в коммерческом банке составляет 11% в год. Какое количество денег будет на счету вкладчика через два года, при условии начисления простых процентов в год, если на его счету 100 тысяч рублей?

2). Ставка по вкладу в коммерческом банке составляет 9% в год. Какое количество денег будет на счету вкладчика через два года, при условии начисления простых процентов в год, если на его счету 100 тысяч рублей?

3). Ставка по вкладу в коммерческом банке составляет 9% в год. Какое количество денег будет на счету вкладчика через два года, при условии начисления 100р сложных процентов в год, если на его счету 100 тысяч рублей?

4). Ставка по вкладу в коммерческом банке составляет 11% в год. Какое количество денег будет на счету вкладчика через два года, при условии начисления 100р сложных процентов в год, если на его счету 100 тысяч рублей?

5). В банке взят кредит в 1 миллион рублей на 3 года под 12% годовых. Какую сумму нужно будет погасить, если кредит взят под накопительные (сложные) проценты?

6). В банке взят кредит в 100 тысяч рублей на 3 года под 15% годовых. Какую сумму нужно будет погасить, если кредит взят под накопительные (сложные) проценты?

7). Через сколько лет произойдет удвоение уровня цен при ежегодной инфляции в 7% в год?

8). Через сколько лет произойдет удвоение уровня цен при ежегодной инфляции в 8% в год?

Ответы к упражнениям § 14

Задачи 14.1.

- 1). 123210 рублей; 2). 118810 рублей; 3). 119720 рублей;
4). 124605 рублей; 5). 1433275 рублей; 6). 156831 рубль.