

Лекция № 4. Исследование функций с помощью производных

1. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Для функции, непрерывной на отрезке, существует согласно теореме Вейерштрасса точка, в которой эта функция принимает наибольшее значение, и точка, в которой эта функция принимает наименьшее значение.

В случае, когда непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет локальные максимумы в точках $x_1, x_2, \dots, x_k$ и локальные минимумы в точках $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ и не имеет других точек локального экстремума, наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно наибольшему из чисел $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), f(b)$, а наименьшее значение этой функции на отрезке $[a, b]$ равно наименьшему из чисел $f(a), f(\tilde{x}_1), f(\tilde{x}_2), \dots, f(\tilde{x}_m), f(b)$.

В прикладных задачах при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке $[a, b]$ или на интервале (a, b) часто встречается случай, когда функция f дифференцируема на интервале (a, b) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, а уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственный корень $x_0 \in (a, b)$ такой, что $f'(x) > 0$ при $x \in (a, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, b)$ или $f'(x) < 0$ при $x \in (a, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, b)$.

В этом случае число $f(x_0)$ является не только локальным экстремумом функции $f(x)$, но и наибольшим (наименьшим) значением этой функции на отрезке $[a, b]$ или на интервале (a, b) .

2. Выпуклость функции.

а) *Понятие выпуклости.* Непрерывная функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх на отрезке $[a, b]$* , если для любых точек x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (22)$$

Дадим геометрическую интерпретацию понятия выпуклости (рис. 3).

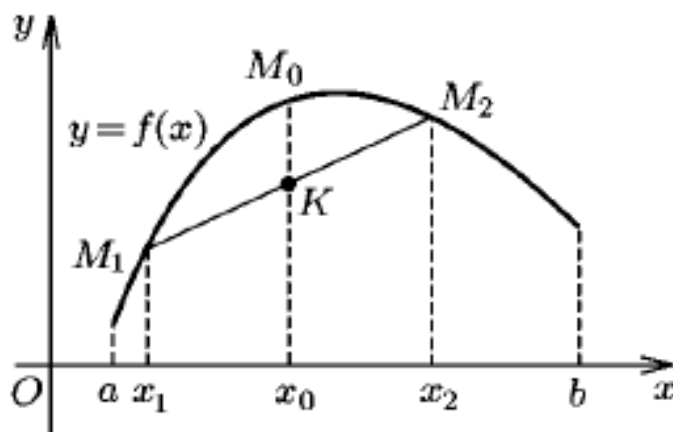


Рисунок 3

Пусть M_1 , M_2 , M_0 — точки графика функции $y = f(x)$, абсциссы которых соответственно равны x_1 , x_2 , $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Тогда $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ есть ордината точки K — середины отрезка $M_1 M_2$, а $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(x_0)$ — ордината точки M_0 графика с абсциссой, равной абсциссе точки K .

Условие (22) означает, что для любых точек M_1 и M_2 графика функции $y = f(x)$ середина K хорды $M_1 M_2$ лежит или ниже соответствующей точки M_0 графика, или совпадает с точкой M_0 .

Если неравенство (22) является строгим при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 \neq x_2$, то непрерывную функцию $y = f(x)$ называют *строго выпуклой вверх на отрезке $[a, b]$* .

б) Аналогично непрерывная функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз на отрезке $[a, b]$* , если для любых точек x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (23)$$

Если неравенство (23) является строгим при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 \neq x_2$, то непрерывную функцию $y = f(x)$ называют *строго выпуклой вниз на отрезке* $[a, b]$.

Пример 2. Функция $f(x) = x^2$ строго выпукла вниз на любом отрезке.

Решение. В самом деле, при $x_1 \neq x_2$ неравенство $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ равносильно неравенству $(x_1 - x_2)^2 > 0$.

Понятие выпуклости и строгой выпуклости вверх (вниз) можно ввести и на интервале. Например, если неравенство (22) выполняется для любых точек интервала (a, b) , то непрерывная функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх на этом интервале*.

в) *Достаточные условия выпуклости.*

Теорема 8. Пусть $f'(x)$ существует на отрезке $[a, b]$, а $f''(x)$ – на интервале (a, b) . Тогда:

1) если

$$f''(x) \geq 0 \text{ при всех } x \in [a, b], \quad (24)$$

то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a, b]$;

2) если

$$f''(x) > 0 \text{ при всех } x \in [a, b], \quad (25)$$

то функция $y = f(x)$ строго выпукла вниз на отрезке $[a, b]$.

Аналогично, при выполнении на интервале (a, b) условия $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) < 0$) функция $y = f(x)$ выпукла вверх (строго выпукла вверх) на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Ограничимся доказательством для случая, когда выполняется условие (24). Нужно доказать, что для любых точек x_1, x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется условие (23). Пусть, например, $x_1 < x_2$ (при $x_1 = x_2$ условие (23) выполняется).

Обозначим $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $x_2 - x_1 = 2h$, тогда $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$, откуда $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$. Применяя к функции $f(x)$ на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при $n = 2$, получаем

$$f(x_1) = f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2, \quad x_0 - h < \xi_1 < x_0,$$

$$f(x_2) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2, \quad x_0 < \xi_2 < x_0 + h.$$

Складывая эти равенства, находим

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + \frac{h^2}{2}(f''(\xi_1) + f''(\xi_2)). \quad (26)$$

Так как $\xi_1 \in (a, b)$, $\xi_2 \in (a, b)$, то в силу условия (24) $f''(\xi_1) \geq 0$, $f''(\xi_2) \geq 0$ и из равенства (26) следует неравенство $f(x_1) + f(x_2) \geq 2f(x_0)$, равносильное неравенству (23).

Замечание 5. Условие $f''(x) > 0$ не является необходимым условием строгой выпуклости вниз функции $y = f(x)$. Например, для функции $f(x) = x^4$ условие $f''(x) > 0$ нарушается при $x=0$, так как $f''(0) = 0$, однако эта функция строго выпукла вниз.

3. Точки перегиба.

а) *Понятие точки перегиба.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке либо конечную, либо бесконечную производную ($f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$). Тогда если эта функция при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, т.е. существует $\delta > 0$ такое, что на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ она выпукла вверх, а на другом выпукла вниз, то x_0 называют *точкой перегиба функции* $f(x)$, а точку $(x_0, f(x_0))$ – *точкой перегиба графика функции* $y = f(x)$.

б) *Необходимое условие наличия точки перегиба.*

Теорема 9. Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$ и если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную, непрерывную в точке x_0 , то

$$f''(x_0) = 0. \quad (27)$$

Доказательство. Пусть $f''(x_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f''(x)$ в точке x_0

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow \text{sign } f''(x) = \text{sign } f''(x_0),$$

т.е. $f''(x) > 0$ или $f''(x) < 0$ для любого $x \in U_\delta(x_0)$.

По теореме 8 функция $f(x)$ либо строго выпукла вниз на интервале $U_\delta(x_0)$ (если $f''(x) > 0$), либо строго выпукла вверх на интервале $U_\delta(x_0)$. Это противоречит определению точки перегиба. Следовательно, должно выполняться условие (27).

в) *Достаточные условия наличия точки перегиба.*

Теорема 10 (первое достаточное условие). Если функция f непрерывна в точке x_0 , имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 , то x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть, например, функция $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0 (в точке x_0 вторая производная может и не существовать). Это означает, что существует $\delta > 0$ такое, что на интервале $\Delta_1 = (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $f''(x) < 0$, а на интервале $\Delta_2 = (x_0, x_0 + \delta)$ – неравенство $f''(x) > 0$.

Тогда по теореме 8 функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале Δ_1 и выпукла вниз на интервале Δ_2 . Следовательно, точка x_0 удовлетворяет всем условиям, указанным в определении точки перегиба.

Например, для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ точка $x = 0$ – точка перегиба, так как $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ меняет знак при переходе через точку $x = 0$.

Теорема 11 (второе достаточное условие). Если $f^{(2)}(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Так как $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, то по теореме 4 функция $f''(x)$ либо строго возрастает, либо строго убывает в точке x_0 . По условию $f^{(2)}(x_0) = 0$, и поэтому $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ при некотором $\delta > 0$, откуда, используя теорему 10, заключаем, что x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.

Например, для функции $f(x) = \sin x$ точка $x = 0$ – точка перегиба, так как $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1 \neq 0$.

4. Асимптоты.

а) *Вертикальная асимптота.* Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty,$$

то прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$.

Например, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота графиков функций $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота графика функции $y = \frac{3-2x}{x+1}$, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – вертикальные асимптоты графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

б) *Асимптота (невертикальная асимптота).* Прямую $y = kx + b$

называют *асимптотой (невертикальной асимптотой) графика функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \quad (28)$$

Если $k \neq 0$, то асимптоту называют *наклонной*, а если $k = 0$, то асимптоту $y = b$ называют *горизонтальной*.

Аналогично вводится понятие асимптоты при $x \rightarrow -\infty$.

Например, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота графиков функций $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$, графика функции $y = a^x$, $a > 1$ при $x \rightarrow -\infty$.

Теорема 12. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b. \quad (30)$$

Доказательство.

Необходимость. Если прямая $y = kx + b$ – асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то выполняется условие (28) или равносильное ему условие

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (31)$$

Разделив обе части равенства (31) на x , получим

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x},$$

откуда следует, что существует предел (29).

Из равенства (31) получаем

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

откуда следует, что существует предел (30).

Достаточность. Если существуют пределы (29) и (30), то $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. выполняется условие (28). Это означает, что прямая $y = kx + b$ – асимптота графика функции $y = f(x)$.

5. Построение графиков функций. При построении графика функции $y = f(x)$ можно придерживаться следующего плана.

- 1) Найти область определения функции. Выяснить, является ли функция четной (нечетной), периодической.
- 2) Найти точки пересечения графика с осями координат и промежутки, на которых $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.
- 3) Найти асимптоты графика.
- 4) Вычислить $f'(x)$, найти экстремумы и промежутки возрастания (убывания) функции.
- 5) Вычислить $f''(x)$, найти точки перегиба и промежутки выпуклости (вогнутости) функции.
- 6) Нарисовать график функции.

Пример 3. Построить график функции $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.