

Лекция №7

16. Обратная матрица, способы её вычисления

Введем определение обратной матрицы. Пусть задана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *невыврожденной* или *неособенной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной* или *особенной*, если $\det A = 0$.

Две квадратные матрицы A и B называются взаимно обратными, если

$$AB = BA = E.$$

Матрица, обратная к A , обозначается через A^{-1} , так что $B = A^{-1}$.

Теорема. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу A^{-1} , необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Обратную матрицу можно найти разными методами. Рассмотрим один из методов, когда обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} .

Вычислим обратную матрицу для матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем сначала определитель заданной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 28 - 15 + 14 - 24 - 10 = 1 \neq 0.$$

Значит, обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов заданной матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 18, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Тогда имеем по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку, перемножив заданную матрицу и найденную обратную матрицу:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы линейных уравнений

Определение. Линейным уравнением называют уравнения, в которых неизвестные переменные содержатся только в первой степени и не содержат произведения неизвестных.

В школьном курсе по основной программе изучаются системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Для повышения уровня знаний решаются системы трех и четырех уравнений. Поэтому рассмотрим системы с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Определение. В общем виде система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными записывается в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные, a_{ij} — коэффициент при неизвестной x_j из i -го уравнения, b_i — свободный член i -го уравнения.

Определение. Система (1) называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

Определение. Прямоугольные таблицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

называют основной и расширенной матрицами системы (1).

Определение. Решением системы (1) называют такой упорядоченный набор чисел $x_1 = t_1, x_2 = t_2, \dots, x_n = t_n$, который каждое уравнение системы обращает в тождество.

Определение. Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, и несовместной, если не имеет решений.

Определение. Система называется определенной, если она совместна и имеет одно единственное решение, и неопределенной, если решений больше, чем одно.

Например, система

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1, \\ 6x_1 + 8x_2 = 1, \end{cases}$$

несовместна, так как если обе части второго уравнения разделить на 2, то левые части двух уравнений будут совпадать, а правые нет.

Система

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -1, \\ 15x_1 - 25x_2 = -5, \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений вида:

$$x_1 = t_1, x_2 = -0,6t_1 + 0,2,$$

где t_1 — произвольное число.

Система

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -1, \\ 5x_1 - 8x_2 = -1, \end{cases}$$

имеет единственное решение $x_1 = 3, x_2 = 2$. Это можно проверить либо методом постановки, либо методом алгебраического сложения. Решим это уравнение методом сложения. Первое уравнение умножим на 5 и вычтем из него второе уравнение, умноженное на 3, получим:

$$x_2 = 2.$$

Умножая первое уравнение на 8 и вычитая из него второе, умноженное на 5, получим

$$x_1 = 3.$$

При решении последней системы мы умножали обе части одного уравнения на некоторое число и вычитали из него другое уравнение, обе части которого умножали тоже на некоторое число. В результате этих преобразований мы получили верный ответ. Такие преобразования называют элементарными, не меняющими решения системы.

Определение. Две системы линейных алгебраических уравнений называют эквивалентными или равносильными, если они обе несовместны, или совместны и имеют одни и те же решения.

Основная задача теории решения систем линейных уравнений состоит в разработке методов их решения, выяснения вопроса совместности и в случае совместности определения числа решений по некоторому методу.