1. Множества. Подмножества. Способы задания множеств

Пример 1. Представить множество четных делителей числа 100 в описательной форме и путем полного перечисления элементов.

Решение. Для выделения подмножества A множества S можно использовать какое-либо свойство Ф, присущее элементам множества A и только им: характеристическое свойство элементов множества A. В этом случае пишут $A=\{x\in S\,|\,\Phi\}$. Такой способ задания множества называют описательным.

Как известно, любое четное число имеет вид $2k$, $k=1,2,\ldots$, а тот факт, что какое-либо число $2k$ является делителем числа 100, означает, что отношение $\dfrac{100}{2k}=\dfrac{50}{k}$ есть натуральное число. Отсюда имеем искомое множество, представленное в описательной форме:

$$A=\left\{2k\in R\,\middle|\,\frac{50}{k}\in N, k\in N\right\},$$

где R – множество действительных чисел, N – множество натуральных чисел.

Так как $100=2^2\cdot 5^2$, то легко перечислить все элементы искомого множества: $A=\{2, 4, 10, 20, 50, 100\}$.

Пример 2. Даны множества

$$A=\{1, 3, 5, 7\},\ B=\{3, 5\},\ C=\{2\},\ D=\{5, 7, 9\},\ K=\{1, 3, 7\}.$$

Указать среди следующих утверждений истинные и ложные:

$$B\subset A,\ B\in A,\ \varnothing\subset B,\ D\not\subset A,\ \varnothing\in B,\ B\subset C,\ K\not\subset A,$$

$\varnothing$ – собственное подмножество множества A, $\{5, 7, 9\}$ – собственное подмножество множества D, K – собст-

венное подмножество множества A.

Р е ш е н и е . По определению, если каждый элемент множества A является элементом множества B, то множество A называется подмножеством множества B. При этом пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Если множество A не является подмножеством множества B, то пишут $A \not\subset B$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается знаком $\varnothing$. Подмножества множества, отличные от него самого и от пустого множества, называются собственными.

Руководствуясь понятием принадлежности элемента множеству и определением подмножества множества, находим, что утверждения

K – собственное подмножество множества A, $B \subset A$, $\varnothing \subset B$, $D \not\subset A$ – истинные;

$\varnothing$ – собственное подмножество множества A, $\{5, 7, 9\}$ – собственное подмножество множества D, $B \in A$, $\varnothing \in B$, $B \subset C$, $K \not\subset A$ – ложные.

2. Операции над множествами

П р и м е р 3 . Даны универсальное множество S и его подмножества A, B, C.

а) Определить множества $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $\overline{B}$, если

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\},\ B = \{1, 3, 5\},\ C = \{0, 3, 7, 9\}.$$

б) Определить множества $(A \setminus B) \cup C$, $\overline{B} \cap \overline{C}$, если

$$S = \{x \in R \mid 0 < x \le 12\},\ A = \{x \in R \mid 2 \le x < 6\},$$

$$B = \{x \in R \mid 3 < x < 10\},\ C = \{x \in R \mid 0 < x \le 2\},$$

где R – множество действительных чисел.

Р е ш е н и е . Объединением (суммой) множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A,\ x \notin B\}.$$

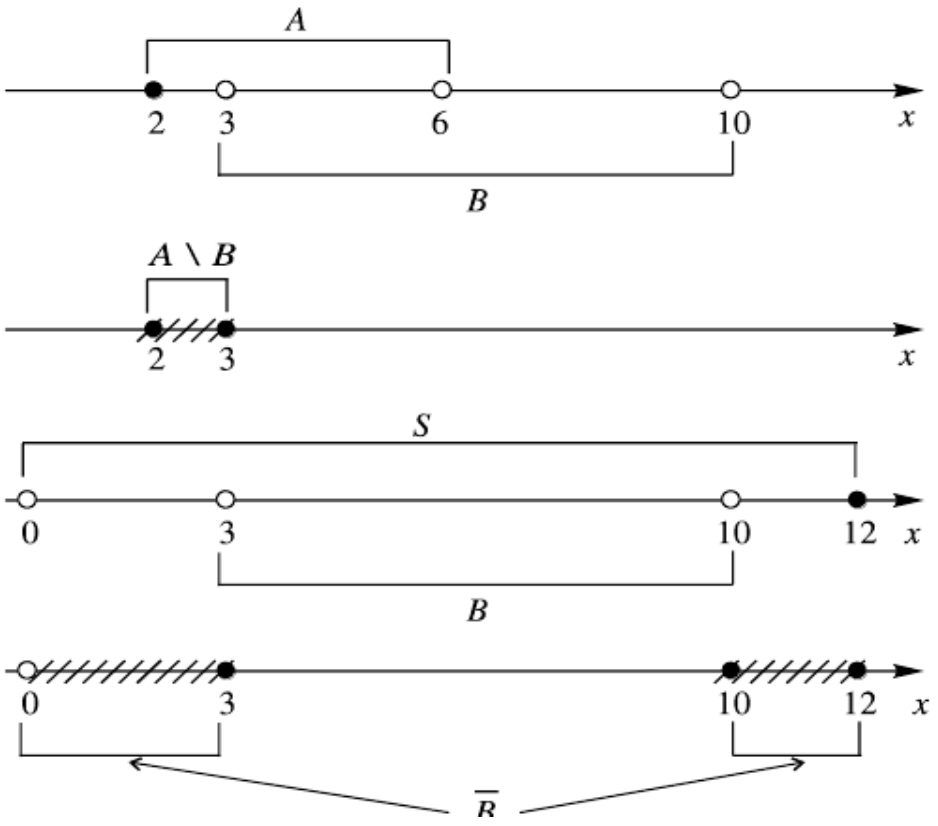
Дополнением множества A называется множество $\overline{A} = S \setminus A$, где S – универсальное множество.

а) По определениям имеем

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}, \quad A \cap B = \{3\},$$

$$A \setminus C = \{2, 4, 6, 8\}, \quad \overline{B} = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}.$$

б) По определениям последовательно находим (см. рис. 1)



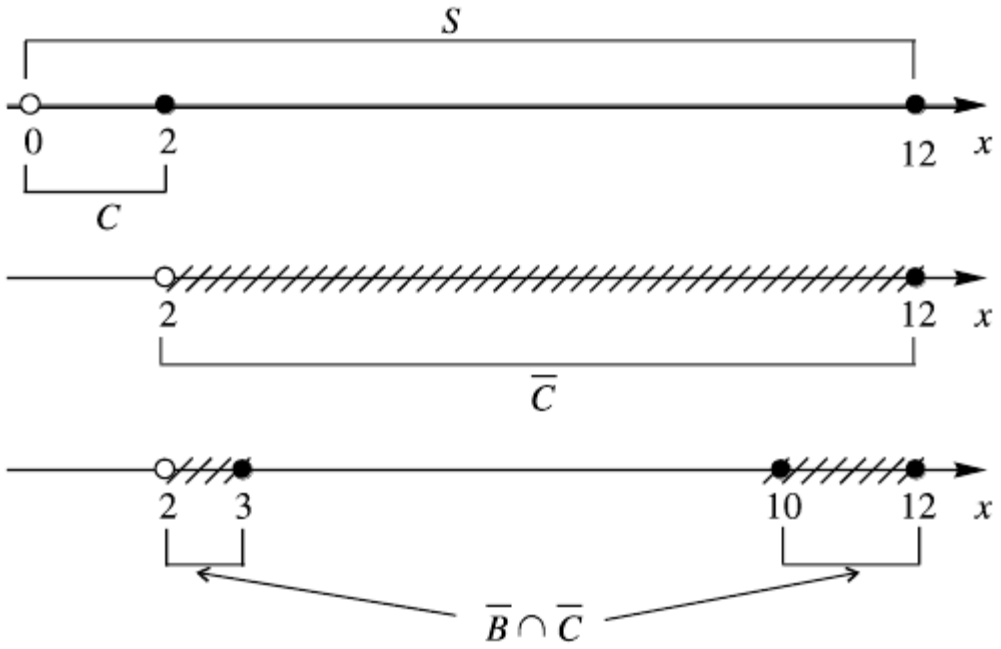


Рис. 1.

$$A \setminus B = \{x \in R \,|\, 2 \le x \le 3\},$$

$$(A \setminus B) \cup C = \{x \in R \,|\, 0 < x \le 3\},$$

$$\overline{B} = \{x \in R \,|\, 0 < x \le 3,\ 10 \le x \le 12\},$$

$$\overline{C} = \{x \in R \,|\, 2 < x \le 12\},$$

$$\overline{B} \cap \overline{C} = \{x \in R \,|\, 2 < x \le 3,\ 10 \le x \le 12\}.$$

3. Декартово произведение множеств

Пример 4. Определить элементы

а) декартова произведения $A \times B$, если

$$A = \{4, 7, 8\}, \qquad B = \{a, b, c, d\};$$

б) множества $(A \cap B) \times C$, если

$$A=\{10, 15, 20, 99, 100, 170\},\quad B=\{0, 1, 15, 45, 99, 115, 170\},$$
$$C=\{\alpha, \beta\}.$$

Р е ш е н и е . Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество

$$A\times B=\{x=(a, b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}.$$

Множество

$$A^2=A\times A=\{x=(a, b)\,|\,a\in A,\ b\in A\}$$

называется декартовым квадратом.

а) По определению имеем

$$A\times B=\{(4, a), (4, b), (4, c), (4, d), (7, a), (7, b), (7, c), (7,d),$$
$$(8, a), (8, b), (8, c), (8, d)\}.$$

б) По определению находим

$$A\cap B=\{15, 99, 170\},$$
$$(A\cap B)\times C=\{(15, \alpha), (15, \beta), (99, \alpha), (99, \beta), (170, \alpha), (170, \beta)\}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать множество натуральных чисел, делящихся без остатка на 3 и не превышающих 40, путем перечисления и описания его элементов.

2. Указать все подмножества множества $\{a, b, c\}$.

3. Даны множества

$$A=\{x\in R\,|\,-5\le x<1\},\quad B=\{x\in R\,|\,-5<x\le 0\},$$

$$C=\{x\in R\,|\,-2\le x\le 1/2\},\quad D=\{x\in R\,|\,0<x<1\}.$$

Указать среди следующих утверждений истинные и ложные:

$C\subset D,\ C\not\subset D,\ \varnothing\in A,\ C\subset A,\ B\in A,\ \varnothing\subset B,\ 2\in D,\ -2\in B,$

$\varnothing$ – собственное подмножество множества B, B – собственное подмножество множества A.

4. Из каких элементов состоят множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$,.если $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$?

5. Определить множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, если $A=\{x\in R\,|\,x>1\}$, $B=\{x\in R\,|\,x<2\}$.

6. Даны универсальное множество S и его подмножества A, B, C. Определить множества $A\cup B$, $B\cap C$, $A\setminus C$, $\overline{B}$, $(A\cup C)\cap B$, $\overline{(\overline{A}\setminus B)\cup C}$, $(A\cap\overline{C})\setminus B$, если

1) $S=\{x\in R\,|\,0\le x\le 10\}$, $A=\{x\in R\,|\,1<x<7\}$,

$B=\{x\in R\,|\,2\le x<8\}$, $C=\{x\in R\,|\,7<x\le 9\}$;

2) $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$,

$B=\{1, 3, 5\}$, $C=\{4, 6\}$.

7. Определить множества $A\times B$, $B\times A$, A^2, B^2, если

$$A=\{1,2\},\qquad B=\{2,3\}.$$