Практическое занятие №7

1. По модулю 15 выпишите:

а) полную систему вычетов;

б) приведенную систему вычетов;

в) полную систему вычетов, состоящую из чисел, делящихся на 4;

г) полную систему вычетов, состоящую из чисел, делящихся на 3;

Решение. Простейшая полная система вычетов по модулю 15 имеет вид $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 13, 14\}$. Полными системами вычетов по модулю 15 являются множества $\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm7\}$ и $\{30, -13, 3, 4, 20, -9, 37, 68, 9, -5, 41, 12, -2, 14\}$.

Простейшая приведенная система вычетов по модулю 15 имеет вид $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$. Приведенными системами вычетов по модулю 15 являются множества $\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm7\}$ и $\{-13, 4, 37, 68, 41, -2, 14\}$.

Полная система вычетов по модулю 15, состоящая из чисел, делящихся на 4, имеет, например, вид $\{4x : x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56\}$.

Полной системы вычетов по модулю 15, состоящей из чисел, делящихся на 3, не существует, поскольку $(3, 15) \neq 1$.

2. Составьте таблицы сложения и умножения в классе вычетов по модулю 3.

Решение.

а)

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

б)

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

3.

Решите сравнение $11x \equiv 5(\mathrm{mod}\ 7)$ всеми возможными способами.

Решение. Прежде всего перепишем сравнение в виде $4x \equiv -2(\mathrm{mod}\ 7)$. Поскольку $(4, 7) = 1$, то сравнение имеет единственное решение — класс вычетов по модулю 7.

Последовательно перебирая числа 0, 1, 2, ..., 6, являющиеся представителями всех классов вычетов по модулю 7, мы получим, что $4 \cdot 3 \equiv -2(\mathrm{mod}\ 7)$, то есть решением сравнения $4x \equiv -2(\mathrm{mod}\ 7)$ является класс вычетов $x \equiv 3(\mathrm{mod}\ 7)$.

Последовательно добавляя к правой части модуль 7, мы получим сравнения $4x \equiv -2(\mathrm{mod}\ 7)$, $4x \equiv 5(\mathrm{mod}\ 7)$, $4x \equiv 12(\mathrm{mod}\ 7)$. Деля две части последнего сравнения на 4, мы получим, что $x \equiv 3(\mathrm{mod}\ 7)$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решите сравнение $8x \equiv 6(\mathrm{mod}\ 5)$ всеми возможными способами.
2. Решите сравнение $5x \equiv 6(\mathrm{mod}\ 7)$ всеми возможными способами.
3. Решите сравнение:

а) $3x \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$;
б) $100x \equiv 21(\mathrm{mod}\ 23)$;
в) $42x \equiv 33(\mathrm{mod}\ 90)$;
г) $20x \equiv 12(\mathrm{mod}\ 48)$;
д) $20x - 50 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 35)$;
е) $78x \equiv 102(\mathrm{mod}\ 273)$;
ж) $315x \equiv -10(\mathrm{mod}\ 275)$;
з) $76x \equiv 232(\mathrm{mod}\ 220)$;
и) $45x \equiv 75(\mathrm{mod}\ 100)$.

4.

По модулю 10 выпишите:

а) полную систему вычетов;
б) приведенную систему вычетов;
в) полную систему вычетов, состоящую из чисел, делящихся на 3;
г) полную систему вычетов, состоящую из чисел, делящихся на 4;