

Задача 1. Перемножить матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим оба произведения AB и BA . Согласно правилу умножения матриц элемент матрицы AB , стоящий в i -й строке и j -м столбце (a_{ij}), равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B . Так, например,

$$a_{23} = (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + (-4) \cdot 9 = -51.$$

Подсчитав таким образом все элементы матрицы AB , находим:

$$AB = \begin{pmatrix} -17 & -34 & -51 \\ -17 & -34 & -51 \\ 17 & 34 & 51 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим на этом примере, что произведение матриц зависит от порядка сомножителей.

Задача 2. Вычислить произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos (\alpha + \beta) & -\sin (\alpha + \beta) \\ \sin (\alpha + \beta) & \cos (\alpha + \beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. От нас требуется найти все матрицы A второго порядка такие, что

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Обозначим (неизвестные) элементы матрицы A через x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие задачи запишется в виде равенства

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & 2x_1 - x_2 \\ x_3 - x_4 & 2x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ -x_1 - x_3 & -x_2 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Но равенство двух матриц означает равенство их элементов, занимающих одинаковые места. Следовательно,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= x_1 + 2x_3, \\ 2x_1 - x_2 &= x_2 + 2x_4, \\ x_3 - x_4 &= -x_1 - x_3, \\ 2x_3 - x_4 &= -x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Фактически мы имеем здесь систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Проводя соответствующие вычисления, находим общее решение системы:

$$\begin{aligned} x_2 &= -2x_3, \\ x_4 &= x_1 + 2x_3. \end{aligned}$$

Таким образом, общий вид матрицы A будет:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & -2x_3 \\ x_3 & x_1 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Произвести умножение матриц в указанном порядке:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверить на нескольких примерах, что произведение зависит от порядка сомножителей.

2. Вычислить выражения:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$;

c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^n$, где $a^2 + bc = 1$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.