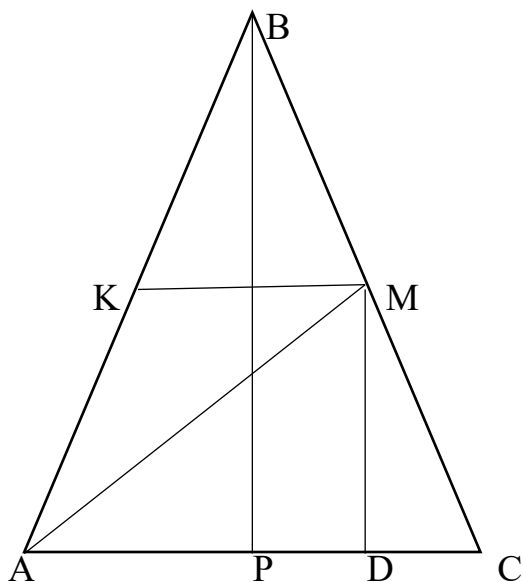


Тема 1.2. Проблемные вопросы в преподавании математики на основе анализа результатов ГИА

Задание 1.

В Δ_{ABC} проведена прямая, параллельная основанию AC и пересекающая стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найти площадь треугольника AMC , если известно, что $KM = 2$, $AC = 10$, $S_{BKM} = 0,8$.



Решение:

В Δ_{KBM} и Δ_{ABC} подобны $AC \parallel KM$, т.к. $\angle B$ — общий

$$\angle C = \angle BKM$$

$$\text{Коэффициент подобия } K = \frac{KM}{AC} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{S_1}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{5}\right)^2; \quad \frac{0,8}{S_{ABC}} = \frac{1}{25}; \quad S_{ABC} = 20$$

$$\text{Из плоскости } \Delta KBM, S_{KBM} = \frac{1}{2} * BE * KM;$$

$$0,8 = \frac{1}{2} * BE * 2, \quad BE = 0,8$$

$$\text{Из плоскости } \Delta ABC, \quad 20 = \frac{1}{2} * BP * AC; \quad 20 = \frac{1}{2} * BP * 10$$

$$BP = 4; \quad MD = BP - EP = 4 - 0,8 = 3,2$$

$$\text{Так как, } KM \parallel AC, \quad MD = 3,2$$

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} * MD * AC = \frac{1}{2} * 3,2 * 10 = 16$$

Ответ: 16

Задание 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{2,5}, \\ \log_3 y \cdot \log_y (y - 2x) = 1. \end{cases}$$

Решение:

Отметим, что

$$\text{О. Д. З. } x > 0, x \neq 1; \quad y > 0, y \neq 1; \quad y - 2x > 0; \quad y > 2x.$$

Из второго уравнения получаем

$$\frac{\log_y (y - 2x)}{\log_y 3} = 1, \quad \text{т. е.} \quad \log_y (y - 2x) = \log_y 3.$$

Отсюда $y - 2x = 3$, или

$$y = 2x + 3.$$

Прологарифмируем первое уравнение системы по основанию x :

$$\log_x (y \cdot x^{\log_y x}) = \log_x (x^{2,5}), \quad \text{т. е.}$$

$$\log_x y + \log_y x \cdot \log_x x = 2,5 \cdot \log_x x, \quad \text{т. е.}$$

$$\log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}. \quad \text{По формуле } \log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

Обозначим $\log_x y = t$. Тогда $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$;

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} = 0; \quad t \neq 0.$$

Отсюда $t_1 = 2$ и $t_2 = \frac{1}{2}$.

Стало быть, $\log_x y = 2$ и $\log_x y = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. Получаем две системы, с учетом (8):

$$\begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

$x^2 - 2x + 3 = 0$, решая квадратное уравнение находим корни

$$x_1 = 3 \text{ и } x_2 = -1 < 0$$

$$y_1 = 2 \cdot 3 + 3 = 9 \quad y_2 = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1 \notin \text{не} \in \text{ОДЗ}$$

$$y_1 = 9 \text{ и } y_2 \neq 1$$

получаем $x = 3, y = 9$.

Ответ: $\{(3,9)\}$.

Задание 3

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 243^{x-2} + 27 \leq 4 \cdot 3^{5x-10} \\ \log_3 \left(\log_7 \frac{6x-7}{3-x} \right) > 0 \end{cases}.$$

Решим второе неравенство системы

$$\begin{aligned} \text{Далее: ОДЗ } \log_7 \frac{6x-7}{3-x} > 0; \\ \log_7 \frac{6x-7}{3-x} > \log_7 1 \Rightarrow \frac{6x-7}{3-x} > 1; \\ \frac{6x-7-3+x}{3-x} > 0; \\ \frac{7x-10}{x-3} < 0. \end{aligned}$$

Нули функции $3; \frac{10}{7}$.

$$x \in \left(\frac{10}{7}; 3 \right); \quad (1)$$

$$\text{О.Д.З. } \frac{6x-7}{3-x} > 0; \quad \frac{6x-7}{x-3} < 0$$

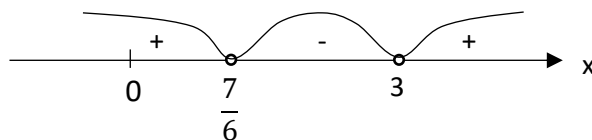


Рисунок 1

$$x \in \left(\frac{7}{6}; 3 \right) \quad (2)$$

Совмещая решения 1 и 2 неравенства имеем:

ОДЗ логарифмического неравенства

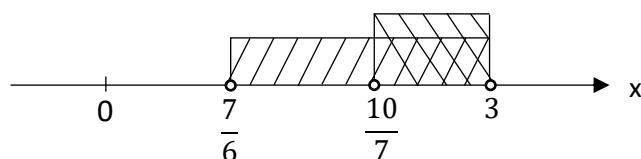


Рисунок 2

$$x \in \left(\frac{10}{7}; 3\right) \text{ ОДЗ} \quad (3)$$

А теперь приступаем к решению самого неравенства

$$\log_3 \left(\log_7 \frac{6x-7}{3-x} \right) > 0 \Rightarrow \log_3 \left(\log_7 \frac{6x-7}{3-x} \right) > \log_3 1$$

$$\log_7 \frac{6x-7}{3-x} > 1 \Rightarrow \log_7 \frac{6x-7}{3-x} > \log_7 7$$

$$\frac{6x-7}{3-x} > 7 \Rightarrow \frac{6x-7-(21-7x)}{3-x} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{13x-28}{x-3} < 0$$

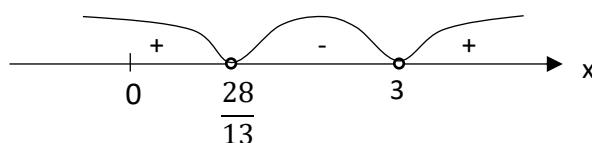


Рисунок 3

$x \in \left(\frac{28}{13}; 3\right)$ решение логарифмического неравенства

Совмещаем ОДЗ с решением логарифмического неравенства, т.е. (3) ,(4)

Совмещая решения 1 и 2 неравенства имеем

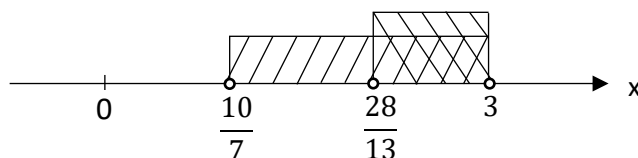


Рисунок 4

$x \in \left(\frac{28}{13}; 3\right)$ решение второго неравенства.

Решим первое неравенство системы

$$243^{x-2} + 27 \leq 4 \cdot 3^{5x-10} \Rightarrow 3^{5(x-2)} + 27 \leq 4 \cdot 3^{5x-10}$$

Введем подстановку $3^{5x-10} = t$;

$$3^{5(x-2)} - 4 \cdot 3^{5x-10} + 27 \leq 0;$$

$$t - 4t + 27 \leq 0 \Rightarrow 3t \geq 27 \Rightarrow t \geq 9;$$

$$3^{5x-10} \geq 9 \Rightarrow 3^{5x-10} \geq 3^2 \Rightarrow 5x - 10 \geq 2;$$

$$5x \geq 12;$$

$$x \geq 2,4.$$

$$x \in [2,4 \infty).$$

При окончательном решении совмещаем решения первого неравенства системы и решения второго логарифмического неравенства, при этом получим:

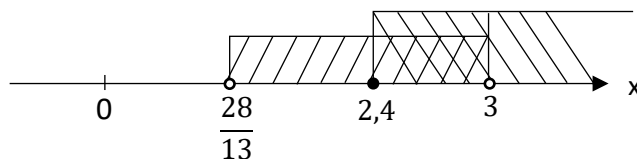


Рисунок 5

$$x \in [2,4; 3)$$

Ответ: $[2,4; 3)$.

Задание 4.

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_3^2(x-5)^2 - 4 \log_3(15-3x) \leq 4 \\ 4^x - 2^{x+4} \leq 6 \cdot 2^x + 75 \end{cases}$$

Решение:

Решаем 1^{ое} неравенство системы:

$$\log_3^2(x-5)^2 - 4 \log_3(3 \cdot (5-x)) \leq 4;$$

Используем свойства логарифмов имеем:

$$\log_3^2(5-x)^2 - 4 \log_3 3 - 4 \log_3(5-x) - 4 \leq 0;$$

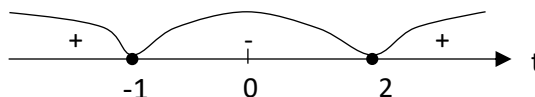
Введем замену переменной, тогда уравнение примет вид:

$$\log_3(5-x) = t;$$

$$4t^2 - 4t - 8 \leq 0;$$

$$t^2 - t - 2 \leq 0;$$

$$(t+1)(t-2) \leq 0$$



$$t_1 \geq -1, \quad t_2 \leq 2$$

Риунок 6

$$t \in [-1; 2]$$

$$\log_3(5-x) \geq -1$$

$$\log_3(5-x) \geq \log_3 \frac{1}{3}, \quad \text{т.к. } 3 > 1, \quad \text{то}$$

$$5-x \geq \frac{1}{3}; \quad -x \geq \frac{1}{3} - 5; \quad -x \geq -4\frac{2}{3}$$

$$x \leq 4\frac{2}{3};$$

$$6) \quad t \leq 2, \quad \log_3(5-x) \leq 2;$$

$$\log_3(5-x) \leq \log_3 9;$$

$$5-x \leq 9; \quad -x \leq 9-5; \quad -x \leq 4;$$

$$x \geq -4;$$

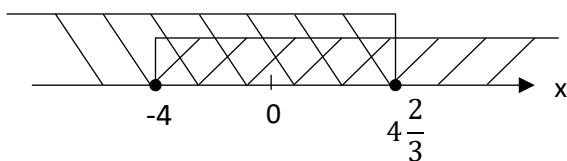


Рисунок 7

$$x \in \left[-4; 4\frac{2}{3}\right].$$

Найдем О.Д.З. $(x-5)^2 > 0$ при любом значении x

$$x \neq 5; \quad x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$$

$$15 - 3x > 0;$$

$$x < 5;$$

Учитывая О.Д.З. имеем:

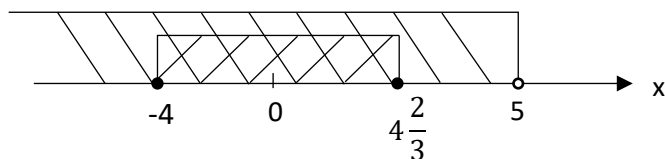


Рисунок 8

$$x \in \left[-4; 4\frac{2}{3}\right].$$

Решаем 2^{ое} неравенство системы

$$4^x - 2^{x+4} \leq 6 \cdot 2^x + 75,$$

$t = 2^x$; неравенство примет вид:

$$t^2 - 22t - 75 \leq 0, \quad t_1 = -3, \quad t_2 = 25;$$

$$(t+3)(t-25) \leq 0;$$

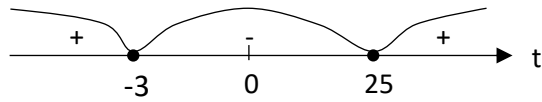


Рисунок 9

$$t \in [-3; 25]$$

$$t \geq -3; 2^x \geq -3 \text{ при } \forall x$$

$$t \leq 25; 2^x \leq 25 \Rightarrow x \leq \log_2 25;$$

$$\text{По формуле } \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \approx \frac{3,2188758}{0,69311718} = 4,64 \dots, \quad 4\frac{2}{3} = 4,66$$

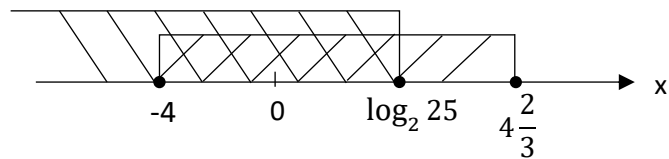


Рисунок 28

$$x \in [-4; \log_2 25].$$

$$\text{Ответ: } [-4; \log_2 25].$$

Задание 5.

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_2 \sqrt{y} = 3 \\ 2x + 5y = 52. \end{cases}$$

$$\text{О.Д.З. } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\log_2 \sqrt{x} + \log_2 \sqrt{y} = 3;$$

$$\log_2 (\sqrt{xy}) = 3;$$

$$\sqrt{xy} = 8;$$

$$xy = 64;$$

$$x = \frac{64}{y}.$$

Подставим найденное значение переменной x во второе уравнение системы

$$2 \cdot \frac{64}{y} + 5y = 52 \Rightarrow 128 + 5y^2 - 52y = 0;$$

$5y^2 - 52y + 128 = 0$; решаем квадратное уравнение,

$$D = 52^2 - 4 \cdot 5 \cdot 128 = 2704 - 2560 = 144;$$

$$y_1 = \frac{52 + 12}{10} = \frac{64}{10} = 6,4; \quad y_2 = \frac{52 - 12}{10} = \frac{40}{10} = 4;$$

$$x_2 = \frac{64}{6,4} = 10; \quad x_2 = \frac{64}{4} = 16;$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ y_1 = 6,4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 16 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

Ответ: (10; 6,4), (16; 4).

Задание 6.

Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 18 рабочих, а во второй – 34 рабочих. Через 11 дней после начала работы в первую бригаду перешли 10 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найти, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Решение

1. Обозначим производительность труда одного рабочего через x , тогда производительность труда 18 рабочих - $18x$, а производительность труда 34 рабочих - $34x$

2. Пусть y - количество дней, которое необходимо для выполнения заказа.

3.

$\frac{18x}{y}$ часть всего заказа выполненного за 1 день рабочими первой бригады,
 $\frac{34x}{y}$ часть всего заказа выполненного за 1 день рабочими второй бригады.

4. За 11 дней они выполнили

$11 \cdot \frac{18x}{y}$ работы выполнили рабочие первой бригады.

$11 \cdot \frac{34x}{y}$ работы выполнили рабочие второй бригады.

5. В оставшиеся дни работы ($y - 11$) в первую бригаду перешли 10 человек из второй бригады, их стало $18+10=28$ оказалось в первой бригаде

$34-10 = 24$ во второй бригаде.

6. В оставшиеся дни рабочие первой бригады выполнили $(y - 11) \cdot \frac{28x}{y}$ работы.

7. В оставшиеся дни рабочие второй бригады выполнили $(y - 11) \cdot \frac{24x}{y}$ работы.

$$11 \cdot \frac{18x}{y} + (y - 11) \cdot \frac{28x}{y} = 11 \cdot \frac{34x}{y} + (y - 11) \cdot \frac{24x}{y} ;$$

$$11 \cdot 18 + (y - 11) \cdot 28 = 11 \cdot 34 + (y - 11) \cdot 24;$$

$$11 \cdot 18 + 28y - 11 \cdot 28 = 11 \cdot 34 + 24y - 11 \cdot 24;$$

$$28y - 24y = 11 \cdot 28 - 11 \cdot 18 = 11 \cdot 34 - 11 \cdot 24;$$

$$4y = 11 \cdot 10 + 11 \cdot 10;$$

$$4y = 220 ; \quad y = 220 : 4 = 55.$$

55 дней потребовалось для выполнения всей работы.

Ответ: 55.