

Практическое занятие №5

1. Найдите целое частное и остаток от деления 19 на 3; -18 на 5; $n^3 + 2n - 1$ на n , где $n \in \mathbb{N}$; $12n^5 + 10n^4 + 2$ на $2n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Легко убедиться в том, что: $19 = 3 \cdot 6 + 1$, причем $6, 1 \in \mathbb{Z}$, и $0 \leq 1 < 3$; $-18 = 5 \cdot (-4) + 2$, причём $-4, 2 \in \mathbb{Z}$, и $0 \leq 2 < 5$; $n^3 + 2n - 1 = n \cdot (n^2 + 1) + (n - 1)$, причем $n^2 + 1, n - 1 \in \mathbb{Z}$, и $0 \leq n - 1 < n$. Аналогично, $12n^5 + 10n^4 + 2 = 2n \cdot (6n^4 + 5n) + 2$, где $6n^4 + 5n, 2 \in \mathbb{Z}$, однако ограничение $0 \leq 2 < 2n$ имеет место лишь для $n \geq 2$. Для $n = 1$ искомое равенство принимает вид $12n^5 + 10n^4 + 2 = 2n \cdot (6n^4 + 5n^3 + 2) + 0$, то есть вид $24 = 2 \cdot 12 + 0$. $\triangleright$

2. Целые числа a , b и c дают при делении на 5 остатки 1, 2 и 4 соответственно. Какие остатки при делении на 5 дают числа $2a$; $-3b$; $5c$; $a + b + c$; $2a - 3b + 5c$; abc ; a^2 ; b^3 ; c^4 ; $17a^2b^3c^4$?

Решение. Из условия задачи следует, что $a = 5q + 1$, $b = 5k + 2$, $c = 5m + 4$, где $q, k, m \in \mathbb{Z}$. Тогда $2a = 5 \cdot (2q) + 2$, причем $2q, 2 \in \mathbb{Z}$, и $0 \leq 2 < 5$. Следовательно, остаток числа $2a$ при делении на 5 равен 2: $\text{rest}(2a, 5) = 2$. Далее, $-3b = 5 \cdot (-3k) - 6$; поскольку $-6 = 5 \cdot (-2) + 4$, то $-3b = 5 \cdot (-3k - 2) + 4$, причем $-3k - 2, 4 \in \mathbb{Z}$, и $0 \leq 4 < 5$. Следовательно, $\text{rest}(-3b, 5) = 4$. Поскольку $5c = 5 \cdot c + 0$, причем $c, 0 \in \mathbb{Z}$, и $0 \leq 0 < 5$, то $\text{rest}(5c, 5) = 0$. Аналогично, $a + b + c = 5(q + k + m) + (1 + 2 + 4)$, и $1 + 2 + 4 = 5 \cdot 1 + 2$, то есть $a + b + c = 5(q + k + m + 1) + 2$, причем $q + k + m + 1, 2 \in \mathbb{Z}$, и $0 \leq 2 < 5$. Таким образом, $\text{rest}(a + b + c, 5) = 2$. Пользуясь полученными ранее соотношениями, можно утверждать, что $2a - 3b + 5c = 5 \cdot (2q - 3k - 2 + c) + (2 + 4 + 0)$, откуда, с учетом равенства $2 + 4 + 0 = 5 \cdot 1 + 1$, следует равенство $2a - 3b + 5c = 5 \cdot (2q - 3k + c - 1) + 1$, причем $2q - 3k + c - 1, 1 \in \mathbb{Z}$, и $0 \leq 1 < 5$. Следовательно, $\text{rest}(2a - 3b + 5c, 5) = 1$. Исследование произведения чисел a , b и c производится по той же схеме: поскольку $1 \cdot 2 \cdot 4 = 5 \cdot 1 + 3$, то $abc = (5q + 1)(5k + 2)(5m + 4) = 5(25qkm + 20qk + 10qm + 8q + 5km + 4k + 2m + 1) + 3$, то есть $\text{rest}(abc, 5) = 3$. Далее, $a^2 = (5q + 1)^2 = 25q^2 + 10q + 1$, то есть

$a^2 = 5(5q^2 + 2q) + 1$, откуда следует, что $\text{rest}(a^2, 5) = 1$. Аналогично, $b^3 = (5k + 2)^3 = 125k^3 + 150k^2 + 60k + 8$, то есть, с учетом равенства $8 = 5 \cdot 1 + 3$, $b^3 = 5 \cdot (25k^3 + 30k^2 + 12k + 1) + 3$, откуда следует, что $\text{rest}(b^3, 5) = 3$. Пользуясь формулой *бинома Ньютона* $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ и замечая, что $4^4 = 5 \cdot 51 + 1$, мы можем записать равенство $c^4 = 5 \cdot t + 1$ для некоторого целого числа t (найдите его самостоятельно!), откуда следует, что $\text{rest}(c^4, 5) = 1$. Наконец, пользуясь предыдущими результатами и замечая, что $17 = 5 \cdot 3 + 2$,

мы можем утверждать, что $17a^2b^3c^4 = (5 \cdot 3 + 2)(5 \cdot n + 1)(5 \cdot s + 3)(5 \cdot t + 1)$, $n, s, t \in \mathbb{Z}$. Поскольку $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 1$, то $17a^2b^3c^4 = 5l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$, то есть $\text{rest}(17a^2b^3c^4, 5) = 1$. $\triangleright$

3.

Докажите, что произведение трех последовательных целых чисел делится на 3.

Решение. Рассмотрим произвольное целое число z и разделим его с остатком на 3: $z = 3q + r$, где $q, r \in \mathbb{Z}$, и $0 \leq r < 3$. Таким образом, $r \in \{0, 1, 2\}$. Если $r = 0$, то $z = 3q$, то есть z делится на 3. Если $r = 1$, то $z = 3q + 1$, то есть $z + 2 = 3(q + 1)$ делится на 3. Если $r = 2$, то $z = 3q + 2$, то есть $z + 1 = 3(q + 1)$ делится на 3. В каждом из рассмотренных случаев произведение $z(z + 1)(z + 2)$ имеет вид $3t$, $t \in \mathbb{Z}$, то есть делится на 3. $\triangleright$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найдите целое частное и остаток от деления:

- | | | |
|-----------------|------------------|-----------------|
| а) 119 на 5; | г) -666 на 13; | ж) 60 на 12; |
| б) -128 на 7; | д) 12 345 на 6; | з) -225 на 3; |
| в) 1000 на 11; | е) -144 на 7; | и) 0 на 77. |

2.

Поделите с остатком при $n \in \mathbb{N}$:

- а) $2n^2 + 4n + 1$ на 2;
- б) $15n^4 + 9n^2 + 2$ на 3;
- в) $8n^2 + 12n - 3$ на 4;