

Практическое занятие 6.

Статистические оценки параметров распределения. Точечная и интервальная оценки математического ожидания

Пример 1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,99$ неизвестного математического ожидания m_x нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если объем выборки $n = 25$, $\bar{x} = 16,8$ и среднее квадратичное отклонение генеральной совокупности $\sigma = 5$.

Решение.

Доверительный интервал определяется неравенством:

$$\left(\bar{x} - t_{1-\alpha, n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + t_{1-\alpha, n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \right).$$

находим t из уравнения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,495$, пользуясь таблицей Лапласа:

$t = 2,58$. Тогда

$$\left(16,8 - 2,58 \frac{5}{\sqrt{10-1}}; 16,8 + 2,58 \frac{5}{\sqrt{10-1}} \right);$$
$$(12,5; 21,1).$$

Пример 2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 10$:

x_j	-2	1	2	3	4	5
m_j	2	1	2	2	2	1

Найти доверительный интервал для математического ожидания m_x с надежностью $\gamma = 0,95$.

► Вычисляем выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{10} = 2$$

и исправленное среднее квадратичное отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2^2 + 3^2}{9}} = 2,4.$$

Из таблицы Стьюдента находим $t_{1-\alpha, n-1}$, где $1 - \alpha = \gamma = 0,95, n = 10$:

$$t_{0,95,9} = 2,26.$$

Тогда

$$\left(2 - 2,26 \frac{2,4}{\sqrt{10-1}}; 2 + 2,26 \frac{2,4}{\sqrt{10-1}}\right);$$

$$(0,192; 3,808)$$

Доверительный интервал с заданной надежностью γ для среднего квадратичного отклонения σ нормально распределенного признака X по исправленному среднему квадратичному отклонению s определяем по формулам:

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q) \text{ при } q < 1, \quad (19.8)$$

$$0 < \sigma < s(1 + q) \text{ при } q > 1,$$

где параметр q находится из таблицы 9.

Пример 3. Произведено 12 измерений некоторой величины одним при-

бором без систематической ошибки, причем исправленное среднее квадратичное отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,5. Найти точность прибора с надежностью $\gamma = 0,99$, если результаты ошибок измерений распределены нормально.

► Точностью прибора обычно называют среднее квадратичное его ошибок измерения. Из неравенств (19.8) следует, что q определяется при $n = 12$, $\gamma = 0,99$ из прил. 9 и неравенства $1 > q = 0,9$. Значит, $0,5 \cdot 0,1 < \sigma < 0,5 \cdot 1,9$. Таким образом, $\sigma \in (0,05; 0,95)$ с вероятностью $\gamma = 0,99$. ◀

8. Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14

15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

9. Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

