

Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Метод Гаусса или метод последовательного исключения неизвестных является самым доступным в плане нахождения решений систем уравнений с числовыми коэффициентами. Этот метод основан на следующей теореме:

Теорема 1. Если из обеих частей одного из уравнений, умноженного на некоторое число, вычесть другое уравнение системы, то полученная система уравнений будет эквивалентна исходной.

Доказательство очевидно, так как в полученной системе все уравнения будут совпадать с исходной системой, кроме одного уравнения, а это уравнение будет представлять собой разность двух уравнений, одно из которых умножено на число. Другими словами, если система имеет решение, то это же решение превратит преобразованное уравнение в тождество.

Следствие. Если к системе несколько раз применить рассмотренные преобразования, то получаемые системы будут равносильны исходной.

Сущность метода Гаусса состоит в том, что посредством рассмотренных преобразований, систему приводят к треугольному или трапецеидальному виду. В ходе преобразований могут получиться уравнения, у которых в левых частях все нули, а правая часть отлична от нуля. Это уравнение не имеет смысла, а, следовательно, и исходная система будет несовместна. Если и в левой и правой частях получаются нули, то это уравнение исключается из системы, поскольку оно имеет место для любых значений переменных. Таким образом, в результате преобразований число уравнений может либо остаться прежним, либо уменьшиться, если система совместная.

Для получения треугольной или трапецеидальной системы поступают следующим образом. Предположим, что среди коэффициентов $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ при неизвестном x_1 имеются числа, отличные от нуля. Пусть это будут a_{11} , который назовем разрешающим элементом.

Если система линейных уравнений является однородной, то она всегда совместна, так как её решением будут нулевые значения: $x_1 = x_2 = \dots = x_n =$

0. Если в исходной системе число уравнений меньше числа неизвестных, то помимо нулевого решения однородная система имеет и ненулевые решения.

Примеры и простейшие свойства векторных пространств. Арифметические векторные пространства

Из курса аналитической геометрии известно, что всякая точка плоскости определяется своими двумя координатами, т. е. упорядоченной системой двух действительных чисел; всякий вектор на плоскости определяется своими двумя компонентами, т. е. снова упорядоченной системой двух действительных чисел. Аналогично всякая точка трехмерного пространства определяется своими тремя координатами, всякий вектор в пространстве - тремя компонентами.

Так, рассмотрим совокупность шаров в трехмерном пространстве. Для того чтобы шар был полностью определен, нужно задать координаты его центра и радиус, т. е. задать упорядоченную систему четырех действительных чисел, из которых, впрочем, последнее (радиус) может принимать лишь положительные значения. Рассмотрим, с другой стороны, различные положения твердого тела в пространстве. Положение тела будет вполне определено, если будут указаны координаты его центра тяжести, направление некоторой фиксированной оси, проходящей через центр тяжести, наконец, угол поворота вокруг этой оси. Таким образом, положение твердого тела в пространстве определяется упорядоченной системой из шести действительных чисел.

Определение. Упорядоченная система n чисел

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1)$$

называется n —мерным вектором.

Числа a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, будут называться компонентами вектора a .

Векторы a и b

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (2)$$

будут считаться равными в том случае, если совпадают их компоненты, стоящие на одинаковых местах, т. е. если $a_i = b_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Для обозначения векторов будут употребляться дальше малые греческие буквы, в то время как малые латинские буквы будут использованы для обозначения чисел.

В качестве примеров векторов укажем следующие:

1) Векторы-отрезки, выходящие из начала координат на плоскости или в трех мерном пространстве, будут при фиксированной системе координат соответственно двух- и трехмерными векторами смысле данного выше определения.

2) Коэффициенты всякого линейного уравнения с n неизвестными составляют n -мерный вектор.

3) Всякое решение любой системы линейных уравнений с n неизвестными будет n -мерным вектором.

4) Если дана матрица на s строк и n столбцов, то ее строки будут n —мерными векторами, столбцы s —мерными векторами.

5) Сама матрица из s строк и n столбцов может рассматриваться как sn —мерный вектор: достаточно прочесть элементы матрицы подряд, строчку за строчкой: в частности, всякая квадратная матрица порядка n может рассматриваться как n^2 - мерный вектор, причем, очевидно, всякий n^2 -мерный вектор может быть получен этим путем из некоторой матрицы порядка n .

Определение. Суммой векторов (1) и (2) называется вектор

$$a + b = (a^1 + b^1, a^2 + b^2, \dots, a_n + b_n) \quad (3)$$

компоненты которого суть суммы соответствующих компонент слагаемых векторов.

Сложение векторов коммутативно и ассоциативно ввиду коммутативности и ассоциативности сложения чисел. Роль нуля играет нулевой вектор

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \quad (4)$$

$$a + 0 = (a_1 + 0, a_2 + 0, \dots, a_n + 0) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a.$$

Для записи нулевого вектора мы употребляем тот же символ 0, как и для числа нуль. Назовем противоположным вектору (1) вектор

$$-a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n). \quad (5)$$

Очевидно, что $a + (-a) = 0$. Теперь легко видеть, что для сложения векторов существует обратная операция – вычитание: разностью векторов (1) и (2) будет вектор $a - b = a + (-b)$, т. е.

$$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n) \quad (6)$$

Умножение вектора a на число k означает при $k > 0$ растяжение a в k раз, а при $k < 0$ растяжение в $|k|$ раз и изменение направления на противоположное. Выражая это правило, через компоненты вектора a и переходя к рассматриваемому нами общему случаю, мы получаем такое определение:

Определение. Произведением вектора (1) на число k называется вектор

$$ka = ak = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n). \quad (7)$$

компоненты, которого равны произведению на k соответственных компонент вектора a .

Из этого определения вытекают следующие важные свойства, проверка которых не представляет труда:

$$k(a \pm b) = ka \pm kb; \quad (8)$$

$$(k \pm l)a = ka \pm la; \quad (9)$$

$$k(Ia) = (kI)a \quad (10)$$

$$1 \times a = a \quad (11)$$

Столь же легко проверяются, но могут быть получены и как следствия из свойств (8) -(11), следующие свойства:

$$0 \times a = 0 \quad (12)$$

$$(-1) \times a = -a \quad (13)$$

$$k \times 0 = 0 \quad (14)$$

$$\text{Если } ka = 0, \text{ то или } k = 0, \text{ или } a = 0. \quad (15)$$

Определение. Совокупность всех n – мерных векторов с действительными компонентами, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, называется n – мерным векторным пространством.

Заметим, что в определение n – мерного векторного пространства не входит операция умножения векторов. Определить умножение векторов было бы легко - положить, например, что компоненты произведения векторов равны произведениям соответственных компонент сомножителей. Так, векторы-отрезки, выходящие на начала координат на плоскости или в трехмерном пространстве, составляют при фиксированной системе координат двумерное и, соответственно, трехмерное векторные пространства.

Приведем аксиоматическое определение линейного пространства: в нем ничего не будет сказано о свойствах отдельного вектора, но будут перечислены те свойства, которыми должны обладать операции над векторами.

Определение. Множество V называется линейным пространством над R , если выполняются следующие условия:

$$1) a + b = b + a \text{ для любых } a, b \in V;$$

$$2) (a + b) + c = a + (b + c) \text{ для любых } a, b, c \in V ;$$

3) во множестве L существует элемент 0 , называемый нулевым элементом, такой, что $a + 0 = a$ для любого $a \in V$;

4) для каждого элемента $a \in L$ существует элемент $(-a) \in V$, называемый противоположным элементом a , такой, что $a + (-a) = 0$;

5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ для любых $\alpha, \beta \in R$ и любого $a \in V$;

6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ для любых $\alpha, \beta \in R$ и любого $a \in V$;

7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ для любого $\alpha \in R$ и любых $a, b \in V$;

8) $1 \cdot a = a$ для любого $a \in V$.