

Ранг матрицы. Способы его вычисления

Если дана некоторая система n — мерных векторов, то возникает естественный вопрос, является ли эта система векторов линейно зависимой или нет.

$$\alpha = (2, -5, 1, -1), \beta = (1, 3, 6, 5), \gamma = (-1, 4, 1, 2)$$

Так как компоненты заданных векторов нам известны, то, считая неизвестными коэффициенты искомой линейной зависимости, мы получаем систему линейных однородных уравнений, которую и решаем методом Гаусса.

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{s1} & a_{s2} \dots a_{sn} \end{pmatrix}$$

содержащая s строк и n столбцов, причем числа s и n никак не связаны между собой. Столбцы этой матрицы, рассматриваемые как s — мерные векторы, могут, быть линейно зависимыми. Ранг системы столбцов, т. е. максимальное число линейно независимых столбцов матрицы A , называется *рангом* этой матрицы.

Обобщим сначала на случай прямоугольных матриц понятие минора. Выбираем в матрице A произвольные k строк и k столбцов, $k \leq \min(s, n)$. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют квадратную матрицу k — го порядка, определитель которой называется *минором k — го порядка* матрицы A . Докажем теперь следующую теорему о ранге матрицы:

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен рангу этой матрицы.

Доказательство. Пусть наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен r . Предположим, - что не нарушает общности

доказательства, - что минор k -го порядка D , стоящий в левом верхнем углу матрицы

[illegible]

отличен от нуля, $D \neq 0$. Тогда первые r столбцов матрицы A будут между собой линейно независимыми: если бы между ними существовала линейная зависимость, то, так как при сложении векторов складываются соответствующие компоненты, между столбцами минора D существовала бы эта же линейная зависимость и поэтому минор D был бы равен нулю.

Докажем теперь, что всякий i -й столбец матрицы A , $r < i \leq n$ будет линейной комбинацией первых r столбцов. Берем любое i , $1 \leq i \leq s$, и строим вспомогательный определитель $(r + 1)$ -го порядка

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{j1} & \dots & a_{jr} & a_{jl} \end{vmatrix},$$

получающийся “окаймлением” минора D соответствующими элементами l -го столбца и i -й строки. При любом i определитель Δ_i равен нулю.

Рассмотрим алгебраические дополнения элементов последней строки определителя Δ_i . Алгебраическим дополнением для элемента a_{il} служит, очевидно, минор D . Если же $1 \leq j \leq r$, то алгебраическим дополнением для элемента a_{il} в Δ_i будет число

$$A_j = (-1)^{(r+1)+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1r} a_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \dots & a_{rr} a_{rl} \end{vmatrix};$$

оно не зависит от i и поэтому обозначено через A_j . Таким образом, разлагая определитель Δ_i по его последней строке и приравнявая его разложение нулю, так как $\Delta_i = 0$, мы получим:

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \dots + a_{ir}A_r + a_{il}D = 0,$$

откуда, ввиду $D \neq 0$,

$$a_{il} = -\frac{A_1}{D}a_{i1} - \frac{A_2}{D}a_{i2} - \dots - \frac{A_r}{D}a_{ir}.$$

Это равенство справедливо при всех $i, i = 1, 2, \dots, s$, а так как его коэффициенты от i не зависят, то мы получаем, что весь l -й столбец матрицы A будет суммой ее первых r столбцов, взятых, соответственно, с коэффициентами

$$-\frac{A_1}{D}, -\frac{A_2}{D}, \dots, -\frac{A_r}{D}.$$

Таким образом, в системе столбцов матрицы A мы нашли максимальную линейно независимую подсистему, состоящую из r столбцов. Этим доказано, что ранг матрицы A равен r т.е. доказана теорема о ранге.

Правило вычисления ранга матрицы:

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k -го порядка D , отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры $(k + 1)$ -го порядка, окаймляющие минор D : если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k .

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы, равен нулю. Однако в матрице содержатся и отличные от нуля миноры второго порядка, например

$$d = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Минор третьего порядка

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор d , отличен от нуля, $d' = 1$, однако оба минора четвертого порядка, окаймляющие минор d' равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен трем.

Пример. Найти максимальную линейно независимую подсистему в системе векторов

$$a_1 = (2, -2, -4), a_2 = (1, 9, 3), a_3 = (-2, -4, 1), a_4 = (3, 7, -1).$$

Составляем матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

для которой данные векторы служат столбцами. Ранг этой матрицы равен двум: минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, но оба минора третьего порядка, его окаймляющие, равны нулю. Отсюда следует, что векторы a_1, a_2 составляют в заданной системе одну из максимальных линейно независимых подсистем. В качестве следствия из теоремы о ранге матрицы докажем утверждение, уже высказанное ранее:

Максимальное число линейно независимых строк всякой матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов. т. е. равно рангу этой матрицы.

Для доказательства транспонируем матрицу, т. е. сделаем ее строки столбцами, сохраняя их нумерацию. При транспонировании максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы не может измениться. Отсюда следует, что ранг новой матрицы равен рангу исходной матрицы; он равен, вместе с тем, максимальному числу линейно независимых столбцов новой матрицы, т. е. максимальному числу линейно независимых строк исходной матрицы.

Укажем еще одно важное следствие на теоремы о ранге матрицы.

Определитель n -го порядка тогда и только тогда равен нулю, если между его строками существует линейная зависимость.

Для вычисления ранга матрицы существует еще один метод, не связанный с теоремой о ранге и не требующий вычисления определителей. Изложим этот метод.

Элементарными преобразованиями матрицы A называются следующие преобразования этой матрицы:

- (а) перемена мест (транспозиция) двух строк или двух столбцов;
- (б) умножение строки (или столбца) на произвольное отличное от нуля число;
- (с) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы. Действительно, если эти преобразования применяются, например, к столбцам матрицы, то система столбцов, рассматриваемых как векторы, заменяется эквивалентной системой. Докажем это лишь для преобразования (с), так как для (а) и (б) это очевидно. Пусть к i —му столбцу прибавляется j —й столбец,

умноженный на число k . Если столбцами матрицы до преобразования служили векторы

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n \quad (1)$$

то после преобразования столбцами матрицы будут векторы

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i = \alpha_i + k\alpha_j, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n, \quad (2)$$

Система (2) линейно выражается через систему (1), а равенство

$$\alpha_i = \alpha_i - k\alpha_j$$

показывает, что система (1), в свою очередь, линейно выражается через (2).

Говорят, что матрица, содержащая s строк и n столбцов, имеет диагональную форму, если все ее элементы равны нулю, кроме элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ (где $0 \leq r \leq \min(s, n)$), равных единице. Ранг этой матрицы равен, очевидно, r .

Всякую матрицу можно элементарными преобразованиями привести к диагональной форме.

В самом деле, пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Если все ее элементы равны нулю, то она уже имеет диагональную форму. Если же в ней есть элементы, отличные от нуля, то транспозицией строк и столбцов можно добиться того, чтобы элемент a_{11} был отличен от нуля. Умножая затем первую строку на a_{11}^{-1} , мы превратим элемент a_{11} в единицу. Если мы вычтем теперь из j -го столбца, $i > 1$, первый столбец, умноженный на a_{1j} , то элемент, a_{1j} будет заменен нулем. Делая это преобразование со всеми столбцами, начиная со второго, а также со всеми строками, мы придем к матрице вида

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Совершая такие же преобразования с матрицей, остающейся в правом нижнем углу, и т. д., мы после конечного числа шагов придем к диагональной матрице, имеющей тот же ранг, что и исходная матрица A . Таким образом, для нахождения ранга матрицы нужно элементарными преобразованиями привести эту матрицу к диагональной форме и подсчитать число единиц, стоящих в последней на главной диагонали.

Критерий совместности системы линейных уравнений

Пусть дана система линейных уравнений

[illegible]

Прежде всего, следует решить вопрос о совместности этой системы. Для этой цели возьмем матрицу A из коэффициентов системы и «расширенную» матрицу A_* , полученную присоединением к A столбца из свободных членов,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a_{s1} & a_{s2} \dots a_{sn} \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} \dots a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

и вычислим ранги этих матриц. Легко видеть, что ранг матрицы $\bar{A}$ либо равен рангу матрицы A , либо на единицу больше последнего. Вопрос о совместности системы линейных уравнений полностью решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (1) тогда и только тогда совместна, когда ранг расширенной матрицы $\bar{A}$ равен рангу матрицы A .

Доказательство. 1. Пусть система (1) совместна и пусть $k_1, k_2, \dots, k_n$ будет одним из ее решений. Подставляя эти числа вместо неизвестных в

систему (1), мы получим s тождеств, которые показывают, что последний столбец матрицы $\bar{A}$ является суммой всех остальных столбцов, взятых соответственно с коэффициентами $k_1, k_2, \dots, k_n$. Всякий другой столбец матрицы $\bar{A}$ входит и в матрицу A и поэтому линейно выражается через все столбцы этой матрицы. Обратно, всякий столбец матрицы A является столбцом и в $\bar{A}$, т. е. линейно выражается через столбцы этой матрицы. Отсюда следует, что, ранги матриц A и $\bar{A}$ равны между собой.

2. Пусть теперь дано, что матрицы A и $\bar{A}$ имеют равные ранги. Отсюда следует, что любая максимальная линейно независимая система столбцов матрицы A остается максимальной линейно независимой системой и в матрице $\bar{A}$. Таким образом, через эту систему, а поэтому и вообще через систему столбцов матрицы A , линейно выражается последний столбец матрицы $\bar{A}$. Существует, следовательно, такая система коэффициентов $k_1, k_2, \dots, k_n$, что сумма столбцов матрицы A , взятых с этими коэффициентами, равна столбцу из свободных членов, а потому числа $k_1, k_2, \dots, k_n$ составляют решение системы (1). Таким образом, совпадение рангов матриц A и $\bar{A}$ влечет за собой совместность системы (1). Теорема полностью доказана.

Однородная система линейных уравнений. Связь решений неоднородной и ассоциированной с ней однородной системы.

Применим критерий Кронекера-Капелли к случаю системы линейных однородных уравнений:

[illegible]

Из теоремы Кронекера-Капелли вытекает, что эта система всегда совместна, так как добавление столбца из нулей не может повысить ранга

матрицы. Это, впрочем, видно и непосредственно - система (1) заведомо обладает нулевым решением $(0, 0, \dots, 0)$.

Пусть матрица A из коэффициентов системы (1) имеет ранг r . Если $r = n$, то нулевое решение будет единственным решением системы (1); при $r < n$ система обладает также решениями, отличными от нулевого, и для разыскания всех этих решений применяется тот же прием, как выше в случае произвольной системы уравнений. В частности, система n линейных однородных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда обладает решениями, отличными от нулевого, если определитель этой системы равен нулю. В самом деле, равенство нулю этого определителя равносильно утверждению, что ранг матрицы A меньше n . Если в системе однородных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то система непременно обладает решениями, отличными от нулевого, так как ранг в этом случае не может быть равным числу неизвестных. Рассмотрим, в частности, случай системы, состоящей из $n - 1$ однородных уравнений относительно n неизвестных, причем предположим, что левые части этих уравнений между собой линейно независимы. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

- матрица из коэффициентов этой системы; через M_i обозначим минор $(n - 1)$ -го порядка, получающийся после вычеркивания из матрицы A ее i -го столбца, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда одним из решений нашей системы будет система чисел

$$M_1, -M_2, M_3, -M_4, \dots, (-1)^{n-1} M_n,$$

а всякое другое решение ему пропорционально.

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

Если вектор $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ является решением системы (1), то при любом числе k вектор $k\beta = (kb_1, kb_2, \dots, kb_n)$ также будет решением этой системы.

Всякая линейная комбинация решений однородной системы (1) будет сама решением этой системы.

Рассмотрим связи, существующие между решениями неоднородных и однородных систем. Пусть дана система линейных неоднородных уравнений:

[illegible]

Система линейных однородных уравнений (1), полученная из системы (2) заменой свободных членов нулями, называется *приведенной системой* для системы (2). Между решениями систем (2) и (3) существует тесная связь, как показывают следующие две теоремы.

I. Сумма любого решения системы (2) с любым решением приведенной системы (1) снова будет решением системы (2).

II. Разность любых двух решений системы (2) служим решением для приведенной системы (1).

Из этих теорем вытекает, что, *найдя одно решение системы линейных неоднородных уравнений (2) и складывая его с каждым из решений приведенной системы (1), мы получим все решения системы (2).*