

Задача 1. Найти линейную комбинацию

$$2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$

следующих векторов:

$$\mathbf{a}_1 = (1; 0; 3; -2),$$

$$\mathbf{a}_2 = (-1; 1; 4; 3),$$

$$\mathbf{a}_3 = (-5; 3; 5; 3).$$

Решение. Складывая векторы:

$$2\mathbf{a}_1 = (2; 0; 6; -4),$$

$$-3\mathbf{a}_2 = (3; -3; -12; -9),$$

$$\mathbf{a}_3 = (-5; 3; 5; 3),$$

находим:

$$2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = (0; 0; -1; -10).$$

Задача 2. Даны векторы:

$$\mathbf{a}_1 = (2; -1; 3; 5),$$

$$\mathbf{a}_2 = (4; -3; 1; 3),$$

$$\mathbf{a}_3 = (3; -2; 3; 4),$$

$$\mathbf{a}_4 = (4; -1; 15; 17).$$

Будет ли $\mathbf{a}_4$ линейной комбинацией $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$?

Решение. Нам требуется выяснить, можно ли вектор $\mathbf{a}_4$ представить в виде

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3, \quad (1)$$

где k_1, k_2, k_3 — некоторые числа. Но вектор (1) имеет следующие координаты:

$$\begin{aligned} 2k_1 + 4k_2 + 3k_3, & -k_1 - 3k_2 - 2k_3, & 3k_1 + k_2 + 3k_3, \\ & 5k_1 + 3k_2 + 4k_3, \end{aligned}$$

и поэтому равенство $\mathbf{a}_4 = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3$ будет иметь место лишь в том случае, если эти числа совпадают с координатами вектора $\mathbf{a}_4$:

$$\left. \begin{aligned} 2k_1 + 4k_2 + 3k_3 &= 4, \\ -k_1 - 3k_2 - 2k_3 &= -1, \\ 3k_1 + k_2 + 3k_3 &= 15, \\ 5k_1 + 3k_2 + 4k_3 &= 17. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Остается выяснить, существуют ли числа k_1, k_2, k_3 , удовлетворяющие этим условиям. Рассматривая соотношения (2) как систему уравнений с неизвестными k_1, k_2, k_3 и решая эту систему, находим, что она имеет (и притом единственное) решение: $k_1 = 2, k_2 = -3, k_3 = 4$. Следовательно, вектор $\mathbf{a}_4$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3.$$

Задача 3. Дана система векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1; 1; 4; 2), \\ \mathbf{a}_2 &= (1; -1; -2; 4), \\ \mathbf{a}_3 &= (0; 2; 6; -2), \\ \mathbf{a}_4 &= (-3; -1; 3; 4), \\ \mathbf{a}_5 &= (-1; 0; -4; -7). \end{aligned}$$

Установить, будет ли система векторов линейно зависимой.

Решение.

Если между векторами данной системы существует соотношение вида:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — какие-то числа, не равные одновременно нулю, $\mathbf{0}$ — вектор $(0; 0; 0; 0)$, то система называется *линейно зависимой*, а само соотношение (3) — *линейной зависимостью* между векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$. Выражая соотношение (3) через координаты, получим 4 числовых равенства:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чтобы найти все линейные зависимости между данными векторами, мы должны найти все решения

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

системы уравнений (4) при условии, что хотя бы одно из неизвестных отлично от нуля. Иначе говоря, нужно найти все ненулевые решения системы (4). Проводя необходимые вычисления, находим общее решение системы:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{7}{6} x_5 - x_3, \\ x_2 &= \frac{5}{6} x_5 + x_3, \\ x_4 &= \frac{1}{3} x_5, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где x_3, x_5 — свободные неизвестные. Отсюда видно, что между данными векторами существует бесчисленное множество линейных зависимостей.

Упражнения (домашняя работа 2)

1. Найти линейную комбинацию $2a_1 - a_2 + 3a_3$ векторов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1; -1; 0; 4), \\ a_2 &= (16; 4; 7; -2), \\ a_3 &= (5; 2; 2; -3). \end{aligned}$$

2. Найти вектор x из уравнения

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (5; -8; -1; 2), \\ a_2 &= (2; -1; 4; -3), \\ a_3 &= (-3; 2; -5; 7). \end{aligned}$$

3. дана система векторов

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (1; 2; 3; 2), \\
\mathbf{a}_2 &= (-2; 1; -2; -5), \\
\mathbf{a}_3 &= (1; -1; -1; 1), \\
\mathbf{a}_4 &= (-1; 2; 1; -2), \\
\mathbf{a}_5 &= (1; -3; -2; 2).
\end{aligned}$$

какие линейные зависимости имеют место между данными векторами