

Задача 1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Постараемся сначала при помощи элементарных преобразований добиться того, чтобы первый элемент в первом столбце был отличен от нуля, в то время как остальные элементы этого столбца обратились в нуль. С этой целью оставим первую строку без изменения, а к каждой из остальных строк прибавим первую, умноженную на подходящее число: ко второй—первую, умноженную на -3 , к третьей—первую, также умноженную на -3 , наконец, к четвертой—первую, умноженную на -5 . Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

Теперь добиваемся того, чтобы второй элемент второго столбца был отличен от нуля, а все следующие за ним элементы этого столбца были равны нулю. Для этого вторую строку оставляем без изменения, а к каждой из следующих за ней строк прибавляем вторую, умноженную на -2 . Получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

Теперь добиваемся того, чтобы второй элемент второго столбца был отличен от нуля, а все следующие за ним элементы этого столбца были равны нулю. Для этого вторую строку оставляем без изменения, а к каждой из следующих за ней строк прибавляем вторую, умноженную на -2 . Получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Третья строка состоит сплошь из нулей, поэтому, вычеркнув ее, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

имеющую тот же ранг. Третий элемент в третьем столбце здесь равен нулю, однако можно добиться того, чтобы он был отличен от нуля, если переставить третий и пятый столбцы. Получится матрица

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая уже имеет требуемый вид. Ранг A' равен трем, следовательно, и ранг исходной матрицы A также равен трем.

Задача 2. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Начинаем с миноров 1-го порядка, т. е. с элементов матрицы A . Среди них явно имеются отличные от нуля. Выберем, например, минор (элемент) $M_1 = 1$, распо-

ложенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и второго столбца, получаем минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, равный нулю. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

отличный от нуля. Переходим теперь к минорам 3-го порядка, окаймляющим M_2 . Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый). Вычисляем их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы A равен 2.

Задача 3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

в зависимости от значений a .

Решение. В качестве минора 1-го порядка, не равного нулю, возьмем элемент 1, расположенный в третьей строке и первом столбце. Окаймляющие его миноры 2-го порядка суть:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1,$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1.$$

—

Единственное значение a , при котором все эти миноры равны нулю, есть $a = 1$; тогда ранг A равен 1. Если же $a \neq 1$, то отличным от нуля будет хотя бы первый из указанных миноров. Окаймляющий его минор третьего порядка есть сам определитель матрицы A . Он равен

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2.$$

Выясним, при каких значениях a это выражение равно нулю. Для этого решим уравнение

$$x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= (x^3 - x) - (2x - 2) = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 2), \end{aligned}$$

откуда следует

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$$

Следовательно, если $a \neq 1$ и $a \neq -2$, то ранг A равен 3.

Окончательно имеем:

при $a = 1$ ранг A равен 1,

при $a = -2$ ранг A равен 2,

при всех остальных значениях a ранг A равен 3.

Упражнения (домашняя работа 4)

1. Найти ранги матриц двумя методами:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

2. Найти ранг матрицы в зависимости от параметра:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix};$$