

Лекция 2. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (1)$$

Здесь $y(x)$ – неизвестная функция, x – независимое переменное.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение.

Определение 2. Функция $y(x)$ называется решением (или интегралом) дифференциального уравнения (1), если она n раз непрерывно дифференцируема на интервале J и при $x \in J$ удовлетворяет уравнению.

Основной задачей дифференциальных уравнений является задача описания всех его решений. На практике часто важно найти лишь то решение уравнения (1), которое удовлетворяет определенным начальным условиям.

В зависимости от вида начальных условий различают задачу Коши и краевую задачу.

Определение 3. Задачей Коши для уравнения (1) называется задача отыскания решения этого уравнения, которое удовлетворяет условиям вида

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

Определение 4. Краевой задачей для уравнения (1) называется задача отыскания функции $y(x)$, удовлетворяющей этому уравнению и некоторым условиям в двух различных точках x_0, x_1 , наложенным на значения этой функции и ее производных.

Примером краевой задачи может быть задача отыскания решений уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющим условиям $y(0) = y(\pi) = 0$ или условиям $y(0) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Можно проверить, что при любом C функции $y = \sin Cx$ удовлетворяют первым условиям, называемым граничным.

В то же время можно показать невозможность удовлетворения вторым условиям.

Эти примеры показывают, что возможный спектр решений различных краевых задач необычайно широк – от отсутствия решений до бесчисленного множества их. Все зависит от конкретного уравнения и конкретных граничных условий.

В отношении же задачи Коши наблюдается большее единообразие. Далее докажем теорему, которая при весьма общих предпосылках установит единственность решения этой задачи.

Определение 5. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1) на интервале J оси x . График этой функции (т.е. кривая $y = \varphi(x)$, $x \in J$) называется *интегральной кривой* уравнения (1).

Используя геометрический смысл первой производной, задача Коши в случае уравнения первого порядка можно сформулировать так: *найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку*; а в случае дифференциального уравнения второго порядка следующим образом: *найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку и имеющую в ней заданный угол наклона касательной*.

Разберем подробнее геометрическую интерпретацию решений дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно первой производной,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (3)$$

Каждой точке $M(x, y)$ той области, где определена функция $f(x, y)$, ставится в соответствие определённое значение y' .

Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (3). Тогда y' есть тангенс угла, образованного касательной к кривой $y = \varphi(x)$ в точке $M(x, y)$ и осью ox .

Таким образом, в каждой точке $M(x, y)$ функция $f(x, y)$ задает некоторое направление, которое совпадает с направлением интегральной кривой, проходящей через эту точку. Другими словами, $f(x, y)$ задает так называемое *поле направлений*.

После этого задача интегрирования дифференциального уравнения, может быть истолкована как задача о нахождении такой кривой, касательная к которой в каждой точке имеет направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Определение. *Изоклиной* дифференциального уравнения (3) называется такая линия плоскости xy , в каждой точке которой наклон интегральных кривых, проходящих через эту точку, одинаков.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0. \quad (1)$$

Здесь x – независимое переменное, $y(x)$ – неизвестная функция,

$F(x, y(x), y'(x))$ – заданная функция переменных $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$.

Уравнение (1) не разрешено относительно производной, а уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2)$$

где $f(x, y)$ – заданная функция двух переменных, называется *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*. Часто встречается и такая запись дифференциального уравнения первого порядка:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$y' = \varphi(x) \cdot \psi(y) \quad (3)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*,

т.е. такое уравнение, разрешенное относительно производной, правая часть которого может быть представлена в виде произведения двух множителей, из которых один не содержит x , а другой y .

Это дифференциальное уравнение, которое можно переписать так:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \psi(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x) dx,$$

может быть записано в таком виде

$$\left(\int \frac{dy}{\psi(y)} \right)' = \left(\int \varphi(x) dx \right)',$$

откуда заключаем, что

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x) dx + C,$$

где C – константа.

Обозначив одну из первообразных функций от $\frac{1}{\psi(y)}$ через $\Psi(y)$ и одну из первообразных функций от $\varphi(x)$ через $\Phi(x)$, получим общий интеграл уравнения (3)

$$\Psi(y) = \Phi(x) + C.$$

Пример 1. $y' = \frac{2x(1 + e^y)}{e^y(1 + x^2)}.$

Несмотря на то, что y является функцией, а не аргументом, операция

$\int \frac{dy}{\psi(y)}$ законна, потому что, как известно из интегрального исчисления,

операция $\int f(z)dz$ имеет смысл не только тогда, когда z – независимое переменное, но и тогда, когда z – функция.

Операция деления на $\psi(y)$ обеих частей уравнения (3) не имеет смысла, если равенство $\psi(y)=0$ *определяет решение данного уравнения*. поэтому мы заранее оговариваем, что в дальнейшем имеются в виду решения, не обращающие $\psi(y)$ в нуль, и мы каждый раз должны проверить, нет ли среди функций, определяемых равенством $\psi(y)=0$, *решений* данного уравнения.

$$\text{Пример. } y' = \frac{y^2 - 2y}{2x}.$$

Так как получение общего решения связано с операцией отыскания первообразных, то необходимо, чтобы $\frac{1}{\psi(y)}$ и $\varphi(x)$ *имели бы первообразные*.

Это условие во всяком случае выполнено, если $\frac{1}{\psi(y)}$ и $\varphi(x)$ – *непрерывные* функции своих аргументов. Так как при интегрировании уравнения мы оговариваем, что $\psi(y) \neq 0$, то из непрерывности $\psi(y)$ следует непрерывность $\frac{1}{\psi(y)}$. Таким образом, если $\psi(y)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, то первообразные от $\frac{1}{\psi(y)}$ и $\varphi(x)$ *существуют*.

Само собой разумеется, что все производимые операции, связанные с получением общего решения, только тогда имеют смысл, если мы знаем наперед, что данное дифференциальное уравнение *имеет решения*. В дальнейшем покажем, что уравнение с разделяющимися переменными имеет решения, пока же примем это утверждение на веру.

Существование и единственность решения задачи Коши

Укажем достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Теорема Пикара. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \quad a > 0, b > 0$$

и удовлетворяет условию Липшица по y равномерно относительно x , т.е.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2| \text{ для всех } x, |x - x_0| \leq a \text{ и } y_1, y_2, |y_1 - y_0| \leq b, \\ |y_2 - y_0| \leq b. \text{ Пусть } M = \max_{(x, y) \in \Pi} |f(x, y)|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \text{ Тогда задача Коши (1)}$$

на промежутке $[x_0 - h; x_0 + h]$ имеет единственное решение $y = \varphi(x)$.

Решение задачи Коши при выполнении условий теоремы Пикара можно найти как предел при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходящейся последовательности функций $\{y_n(x)\}$, определяемых рекуррентным соотношением

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, \quad y_0(x) = y_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Оценка погрешности, получаемой при замене точного решения $y(x)$ n -м приближением $y_n(x)$, выражается равенством

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n.$$

Теорема Пеано. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π , причем

$$M = \max_{(x, y) \in \Pi} |f(x, y)|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Тогда задача Коши на промежутке $[x_0 - h; x_0 + h]$ имеет по крайней мере одно решение $y = \varphi(x)$.

Точка (x_0, y_0) называется точкой единственности решения задачи Коши, если через эту точку проходит только одна интегральная кривая уравнения (1). Если через точку (x_0, y_0) проходит более одной интегральной кривой уравнения (1), то такую точку называют точкой неединственности решения задачи Коши. Множество точек неединственности называют особым множеством. Если особое множество содержит интегральную кривую, то такую кривую называют особой интегральной кривой, а соответствующее этой интегральной кривой решение – особым решением.

Задача Коши $y(x_0) = y_0$ для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (2)$$

имеет единственное решение (точка (x_0, y_0) является точкой единственности решения), если не существует двух интегральных кривых уравнения (2), которые проходили бы через точку (x_0, y_0) и имели бы в этой точке общую касательную. В противном случае в точке (x_0, y_0) единственность решения задачи Коши нарушается (точка (x_0, y_0) является точкой неединственности решения задачи Коши).

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (2) определяет следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $F(x, y, y')$ дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) , где y'_0 – один из корней уравнения $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по y и y' , а ее производная по y' отлична от нуля

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0.$$

Тогда существует единственное решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, $y(x_0) = y_0$, определяемое в достаточно малой окрестности точки x_0 , для которого $\varphi'(x_0) = y'_0$.

Как и уравнения, разрешенные относительно производной, уравнения вида (2) могут иметь особые решения, т.е. такие решения, соответствующая интегральная кривая которых целиком состоит из точек неединственности.

Если функция $F(x, y, y')$ непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по y и y' , то особое решение уравнения (2), если оно имеется, удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Поэтому, чтобы отыскать особые решения уравнения (2), из системы уравнений (3) надо исключить y' . Полученное при этом уравнение $\psi(x, y) = 0$ определяет дискриминантную кривую. Для каждой ветви дискриминантной кривой необходимо проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (2), и если является, то окажется ли это решение особым, т.е. состоит ли соответствующая ему интегральная кривая из точек неединственности.

если семейство кривых $\Phi(x, y, c) = 0$, являющихся интегральными кривыми уравнения (2), имеет огибающую $y = \varphi(x)$, то она представляет собой особую интегральную кривую этого же уравнения. Если функция $\Phi(x, y, c)$ непрерывно дифференцируема, то огибающая входит в состав дискриминантной кривой, определяемой системой уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c}(x, y, c) = 0. \end{cases}$$

Некоторая ветвь $y = \varphi(x)$ дискриминантной кривой заведомо является огибающей, если $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \varphi(x), c) \neq 0$ или $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \varphi(x), c) \neq 0$.

В общем случае, чтобы узнать, является ли ветвь $y = \varphi(x)$ дискриминантной кривой огибающей (особой интегральной кривой), следует выяснить, касаются ли ее в каждой точке кривые семейства $\Phi(x, y, c) = 0$. Если они являются интегральными кривыми уравнения $F(x, y, y') = 0$, то интегральные кривые уравнения

$$F\left(x, y, \frac{y' \mp k}{1 \pm ky'}\right) = 0$$

пересекают кривые данного семейства под одним и тем же углом α , для которого $\operatorname{tg} \alpha = k$. В частности, интегральные кривые уравнения

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \text{ ортогональны кривым } \Phi(x, y, c) = 0.$$