

Практика 3.

Задания по темам:

Нормальное распределение признака, его свойства.

Понятие вероятности.

Определение вероятности попадания величины в заданный интервал по графику.

Блок 1. Нормальное распределение и его свойства

Задание 1 Форма кривой и параметры

На доске нарисован график кривой:

- (a) Какая кривая соответствует большему среднему μ ? (Сравните по положению пика.)
- (b) Какая кривая соответствует большему стандартному отклонению σ ? (Сравните по «размытости», ширине.)
- (c) Запишите обозначение нормального распределения: $N(\mu, \sigma^2)$. Что означает каждый параметр?

Задание 2 Правило трёх сигм

Для нормально распределённой случайной величины известно, что:

- примерно 68% значений лежит в интервале $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$;
- примерно 95% — в $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$;
- примерно 99.7% — в $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

Рост взрослых мужчин в некоторой популяции распределён нормально с $\mu = 175$ см, $\sigma = 7$ см.

- (a) В каких пределах находится рост 68% мужчин?
- (b) Какой процент мужчин имеет рост от 161 до 189 см?
- (c) Какой процент мужчин имеет рост более 189 см? (Используйте симметрию.)

Задание 3 Свойства нормального распределения

Выберите верные утверждения (да/нет):

- (a) Нормальное распределение симметрично относительно среднего.
- (b) Медиана нормального распределения не равна среднему.

- (с) График плотности нормального распределения имеет две моды.
- (d) Чем больше σ , тем выше и уже график.
- (е) Площадь под всей кривой плотности равна 1.

Задание 4 Стандартное нормальное распределение

Случайная величина $Z \sim N(0, 1)$ (стандартное нормальное распределение). По таблице значений функции Лапласа $\Phi(z)$ (или по графику) найдите:

- (a) $P(Z < 1.96)$
- (b) $P(Z > 1.96)$
- (с) $P(-1.64 < Z < 1.64)$
- (d) Значение z , для которого $P(Z < z) = 0.975$.

Блок 2. Понятие вероятности

Задание 5 Классическое определение вероятности

В корзине 10 шаров: 4 белых, 6 чёрных. Наугад вынимают один шар.

- (a) Какова вероятность вынуть белый шар?
- (b) Какова вероятность вынуть чёрный шар?
- (с) Сумма вероятностей. Почему она равна 1?

Задание 6 Геометрическая вероятность

На отрезок $[0, 5]$ наудачу бросают точку. Найдите вероятность того, что она попадёт в интервал $[2, 4]$. Решите, считая, что вероятность пропорциональна длине интервала.

Задание 7 Статистическая вероятность (частотный подход)

Из 500 подбросов монеты орёл выпал 268 раз.

- (a) Какова относительная частота выпадения орла?
- (b) Можно ли эту частоту считать вероятностью? Почему?
- (с) Как, согласно закону больших чисел, частота приближается к вероятности при увеличении числа испытаний?

Задание 8 Свойства вероятности

События A и B несовместны. Известно, что $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$.

- (a) Найдите $P(A \cup B)$.
- (b) Найдите $P(\bar{A})$ (вероятность противоположного события).
- (с) Могут ли A и B быть независимыми? Объясните.

Блок 3. Определение вероятности попадания величины в заданный интервал по графику плотности

Задание 9 Чтение вероятности по площади под кривой

Дан график плотности нормального распределения $N(0, 1)$. Заштрихована

область левее $z = 1$. Известно, что площадь под кривой слева от 1 равна примерно 0.8413.

- (a) Чему равна вероятность $P(Z \leq 1)$?
- (b) Как по графику найти $P(Z > 1)$? Вычислите.
- (c) Покажите, как заштриховать область, соответствующую $P(-1 < Z < 1)$, и найдите эту вероятность, если $P(Z < 1) = 0.8413$, $P(Z < -1) = 0.1587$.

Примечание: рисунки будут нарисованы преподавателем на доске от руки.

Задание 10 Построение графика и оценка вероятности

Нарисуйте график плотности нормального распределения со средним $\mu = 50$ и $\sigma = 10$. Отметьте на оси точки 30, 50, 70.

- (a) Заштрихуйте область, соответствующую вероятности $P(40 \leq X \leq 60)$. Как её площадь соотносится с правилом «68%»?
- (b) Заштрихуйте область для $P(X > 70)$. Оцените эту площадь в процентах, используя правило трёх сигм.
- (c) Если бы σ была меньше (например, 5), стала бы эта площадь больше или меньше? Поясните, глядя на форму кривой.

Задание 11 Интерпретация вероятности как доли совокупности

Рост студентов (см) распределён нормально с $\mu = 170$, $\sigma = 8$. Постройте мысленно график плотности.

- (a) Какой процент студентов имеет рост от 162 до 178 см? (Найдите по правилу 68-95-99.7.)
- (b) Изобразите на графике эту область. Что означает заштрихованная площадь?
- (c) Как по графику определить, больше ли вероятность $P(X < 165)$ или $P(X > 175)$? Объясните, не вычисляя точных значений.