

Практика 4.

Задания по темам:

Общие принципы применения статистических критериев.

Параметрические и непараметрические критерии.

Уровень статистической значимости критерия.

Блок 1. Общие принципы применения статистических критериев

Задание 1 Нулевая и альтернативная гипотезы

Для каждой исследовательской задачи сформулируйте нулевую гипотезу H_0 и альтернативную H_1 (одностороннюю или двустороннюю):

- (a) Хотят выяснить, отличается ли средний рост студентов в группе от 170 см.
- (b) Нужно проверить, что новый препарат снижает артериальное давление (по сравнению с плацебо).
- (c) Исследователь предполагает, что коэффициент корреляции между доходом и уровнем образования не равен нулю.

Задание 2 Ошибки первого и второго рода

В таблице представлены возможные исходы проверки гипотезы:

	H_0 верна	H_0 неверна
Отвергли H_0	Ошибка I рода	Верное решение
Не отвергли H_0	Верное решение	Ошибка II рода

- (a) Дайте определение ошибки первого рода (α) и ошибки второго рода (β).
- (b) В судебной системе: H_0 – «обвиняемый невиновен». Что будет ошибкой первого рода? А второго?
- (c) Как связаны уровень значимости α и вероятность ошибки первого рода?

Задание 3 Этапы проверки статистической гипотезы

Расположите следующие шаги в правильном порядке:

- (i) Сравнить полученное значение критерия с критическим значением.

- (ii) Сформулировать нулевую и альтернативную гипотезы.
- (iii) Вычислить наблюдаемое значение критерия по выборке.
- (iv) Сделать вывод (отклонить H_0 или нет).
- (v) Выбрать уровень значимости α и соответствующий статистический критерий.
- (vi) Определить критическую область (или p-значение).

Запишите последовательность цифрами.

Задание 4 p-значение (уровень значимости)

При проверке гипотезы получено $p\text{-value} = 0.032$. Уровень значимости задан $\alpha = 0.05$.

- (a) Что означает $p\text{-value} = 0.032$?
- (b) Следует ли отвергнуть H_0 ? Объясните правило сравнения $p\text{-value}$ и α .
- (c) Если бы α была равна 0.01, изменилось бы решение? Почему?

Блок 2. Параметрические и непараметрические критерии

Задание 5 Выбор критерия в зависимости от ситуации

Для каждой задачи определите, какой критерий (параметрический или непараметрический) предпочтительнее, и назовите один подходящий критерий:

- (a) Сравнение среднего уровня гемоглобина в двух группах пациентов, предполагается нормальное распределение.
- (b) Сравнение оценок удовлетворённости сервисом (по 5-балльной шкале) двух магазинов, распределение явно не нормальное.
- (c) Проверка связи между полом (муж/жен) и предпочтением политической партии (5 категорий).
- (d) Сравнение медиан времени решения задачи в двух независимых выборках, распределение неизвестно и выборка мала.

Задание 6 Устойчивость к выбросам

Даны две выборки: 2, 3, 4, 4, 5 и 2, 3, 4, 4, 50 (во второй – выброс).

- (a) Вычислите t-критерий Стьюдента для сравнения этих двух выборок с первой (предполагая, что сравниваются две независимые группы? Здесь, скорее, нужно показать влияние выброса на параметрический критерий. Уточним: пусть есть одна выборка и мы сравниваем её с фиксированным значением, например, 5. Или просто покажем, что среднее меняется).
- (b) Вычислите непараметрический критерий знаков (или U-критерий Манна-Уитни) для тех же данных (можно вручную или описать идею).
- (c) Какой критерий сильнее изменился из-за выброса? Почему непараметрические критерии называют робастными?

Задание 7 Мощность критерия

Что такое мощность статистического критерия? Как мощность связана с вероятностью ошибки II рода? Почему при прочих равных параметрические критерии обычно обладают большей мощностью, чем непараметрические, если предположения о распределении верны?

Блок 3. Уровень статистической значимости критерия

Задание 8 Выбор уровня α

Исследователь тестирует новый лекарственный препарат. Ошибка первого рода (ложноположительное заключение об эффективности) может привести к выпуску неэффективного лекарства, ошибка второго рода – к отказу от эффективного. Обычно выбирают $\alpha = 0.05$ или $\alpha = 0.01$.

- (а) Какой уровень α является более строгим? Объясните смысл.
- (б) В каком случае лучше выбрать $\alpha = 0.01$, а в каком допустимо $\alpha = 0.1$? Приведите аргументы.

Задание 9 Связь α и критической области

Пусть для некоторого критерия критическая область определяется неравенством $|T| > c$, где T – статистика критерия, c – критическое значение.

- (а) Как изменение α (уменьшение) влияет на критическое значение c ? (Увеличивается, уменьшается, не меняется?)
- (б) Если $\alpha = 0.05$, $c = 1.96$ (для стандартного нормального распределения). Каким станет c при $\alpha = 0.01$? А при $\alpha = 0.1$?
- (с) Нарисуйте схематично плотность распределения статистики T при H_0 и заштрихуйте критическую область для $\alpha = 0.05$ (двустороннюю).

Задание 10 Множественное тестирование (проблема множественных сравнений)

Если провести 20 независимых статистических тестов при уровне значимости $\alpha = 0.05$ для каждого, то даже если все нулевые гипотезы верны, в среднем сколько тестов дадут ложное отвержение H_0 ? Как называется это явление? Какой метод коррекции (например, поправка Бонферрони) вы знаете?

Комплексное задание (по всем темам)

Задание 11 Применение на практике: параметрический и непараметрический

Исследователь сравнивает две группы студентов (по 15 человек) по результатам теста. В первой группе результаты: 85, 87, 88, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, во второй: 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85.

- (а) Можно ли предполагать нормальное распределение в каждой группе? (Проверьте по виду данных.)
- (б) Примените t-критерий Стьюдента для независимых выборок (формулы даны, можно вычислить или описать шаги). Каков уровень значимости (p-значение) примерно?

- (с) Примените непараметрический критерий Манна–Уитни (объясните принцип ранжирования, не обязательно вычислять полностью).
- (д) Сравните выводы. В каком случае параметрический критерий более мощный?

Задание 12 Ошибки и интерпретация α

Исследователь сообщает: «Мы получили статистически значимый результат при $\alpha = 0.05$ ($p = 0.03$), поэтому нулевая гипотеза отвергается с вероятностью 97%».

- (а) Верна ли такая интерпретация? Если нет, объясните, в чём ошибка.
- (б) Дайте правильную формулировку того, что означает $p = 0.03$.
- (с) Если бы исследователь использовал непараметрический критерий, как бы это повлияло на p -значение (скорее всего, стало бы больше или меньше)? Аргументируйте.

Задание 13 Проектная задача: выбор критерия и уровня значимости

Вы работаете в маркетинговом агентстве. Нужно выяснить, увеличивает ли новая рекламная кампания среднюю выручку с одного клиента (по сравнению со старой кампанией). У вас есть две независимые выборки по 40 клиентов.

- (а) Сформулируйте H_0 и H_1 .
- (б) Предположим, что распределение выручки скошено вправо (много маленьких значений и несколько крупных). Какой критерий вы выберете: параметрический (например, t -критерий) или непараметрический (например, Манна–Уитни)? Почему?
- (с) Какой уровень значимости α вы выберете (0.1, 0.05 или 0.01)? Учтите, что последствия ошибки первого рода (объявить кампанию эффективной, хотя это не так) стоят денег на внедрение, а ошибки второго рода (пропустить реальный эффект) – упущенная прибыль. Аргументируйте.
- (д) Что произойдёт с критической областью, если вы увеличите α с 0.05 до 0.1? Как это повлияет на вероятность ошибки первого и второго рода?

Задание 14 Сравнение параметрического и непараметрического подхода на малой выборке

Даны две очень малые выборки: Группа А: 2, 3, 4; Группа Б: 5, 6, 7.

- (а) Можно ли использовать t -критерий для таких выборок? Каковы требования к объёму и распределению?
- (б) Предложите непараметрический критерий, который можно применить (например, критерий Манна–Уитни). Выполните ранжирование объединённой выборки.
- (с) Какой вывод вы сделаете о различии групп? (Интуитивно понятно, что группы разные, но формальная проверка на малых выборках может не дать значимости.)