

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Определения и свойства неопределенного интеграла

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если в каждой точке этого промежутка функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если известна одна первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , то любая другая первообразная может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная величина. Такая форма записи первообразных носит название *общего вида первообразной*.

Геометрически, в системе координат xOy , графики всех первообразных функций от данной функции $f(x)$ представляют семейство кривых, зависящих от одного параметра C , которые получаются одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси Oy (рис. 1).

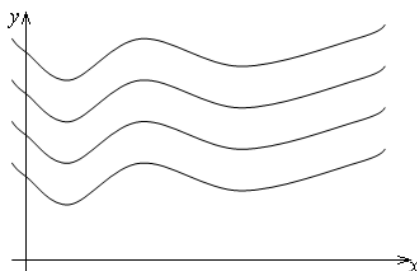


Рис. 1. Семейство первообразных функций

Определение 2. Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется *неопределённым интегралом функции $f(x)$* на этом интервале и обозначается символом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке (a, b) , то она имеет на промежутке (a, b) первообразную и неопределённый интеграл.

Из определений первообразной $F(x)$ и неопределённого интеграла от данной функции $f(x)$ на некотором промежутке следуют свойства неопределённого интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.
4. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, где $k = \text{const}$.
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Замечание. Все вышеперечисленные свойства верны при условии, что интегралы, фигурирующие в них, рассматриваются на одном и том же промежутке и существуют.

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$	2. $\int dx = x + C$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0, -a < x < a$
15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, a > 0; x \neq \pm a$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2+a} \right + C$

Справедливость формул интегрирования, а также и каждый результат интегрирования можно проверить путем дифференцирования на том основании, что интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

Непосредственное интегрирование

а) *Работа с таблицей*: если предложенный интеграл оказался одним из табличных интегралов, то в этом случае требуется найти соответствующую формулу таблицы основных интегралов и воспользоваться ею.

б) *Подведение под знак дифференциала*: предложенный интеграл удастся свести к табличному с помощью изменения переменной интегрирования или за счёт преобразований под знаком дифференциала. Это основано на определении дифференциала $d(\varphi(x)) = \varphi'(x)dx$.

Часто используют следующие формулы:

$dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$	$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$	$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$
$e^x dx = d(e^x)$	$\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$d(\cos x) = -\sin x dx$	$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$	$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$

и т.д.

Примеры с решениями

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$ (таблица формула 14)

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{4+x^2} \right| + C$ (таблица формула 16)

Пример 3. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$
(использована формула $\sin x dx = d(\cos x)$).

Пример 4. $\int (2x-7)^{10} dx = \frac{1}{2} \int (2x-7)^{10} \cdot d(2x-7) =$
 $= \frac{1}{2} \frac{(2x-7)^{11}}{11} + C = \frac{1}{22} (2x-7)^{11} + C$ (использована формула $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$).

Пример 5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{3^2-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{x^2}{3} + C$

(использована формула $x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$).

Пример 6. $\int \frac{e^x dx}{7-5e^x} = -\frac{1}{5} \int \frac{d(7-5e^x)}{7-5e^x} = -\frac{1}{5} \ln |7-5e^x| + C$

(использована формула $e^x dx = d(e^x)$).

Пример 7. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 1)} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x + 1} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$

(использована формула $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$).

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int (2x+5)^3 dx$	2. $\int \sin^2 x \cos x dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5x+7}}$	4. $\int x(2+x^2)^4 dx$
5. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$	6. $\int \frac{dx}{x+10}$
7. $\int \frac{dx}{12-7x}$	8. $\int \frac{x}{x^2+2} dx$
9. $\int \frac{x}{3-2x^2} dx$	10. $\int \sin(3x+5) dx$
11. $\int \cos \frac{x}{2} dx$	12. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$
13. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$	14. $\int \frac{dx}{\sin^2(x/5)}$
15. $\int \frac{dx}{1+\cos 3x}$	16. $\int \frac{dx}{1-\cos 5x}$
17. $\int 7^x dx$	18. $\int 2^x \cdot 5^x dx$
19. $\int \frac{dx}{4x^2+25}$	20. $\int \frac{dx}{30+12x^2}$
21. $\int \frac{dx}{9x^2-16}$	22. $\int \frac{dx}{x^2-36}$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{121-25x^2}}$	24. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-18}}$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}$	26. $\int \frac{x dx}{4x^4+25}$

27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 2}}$	28. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 - 9\sin^2 x}}$
29. $\int 2^{-x^2} x dx$	30. $\int 7^{\cos 2x} \sin 2x dx$

§2. Интегрирование посредством разложения подынтегральной функции на слагаемые

Метод интегрирования разложением функции на слагаемые базируется на линейных свойствах неопределенного интеграла (свойства 4 и 5). Если подынтегральная функция представляет алгебраическую сумму нескольких слагаемых, то, согласно свойству (5), можно интегрировать каждое слагаемое отдельно. Это позволяет многие интегралы свести к сумме более простых интегралов.

Примеры с решениями

Пример 1. Найти интеграл $\int (3x^2 + 2x - 5) dx$

Решение.

$$\int (3x^2 + 2x - 5) dx = \int 3x^2 dx + \int 2x dx - \int 5 dx = x^3 + x^2 - 5x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{7x^2 + x - 1}{x^3} dx$

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель

$$\int \frac{7x^2 + x - 1}{x^3} dx = 7 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = 7 \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int (1 + e^x)^3 dx$

Решение. Возводим в куб и интегрируем каждое слагаемое

$$\begin{aligned} \int (1 + e^x)^3 dx &= \int (1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}) dx = \int dx + 3 \int e^x dx + 3 \int e^{2x} dx + \int e^{3x} dx = \\ &= x + 3e^x + \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x} + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 4} dx$

Решение. Разлагаем подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, деля числитель почленно на знаменатель

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 4} dx = \int \frac{2x}{x^2 - 4} dx - 3 \int \frac{dx}{x^2 - 4} = \ln|x^2 - 4| - \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{x^2 + 5} dx$

Решение. Выделим в неправильной дроби целую часть и правильную дробь

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 + 5} dx &= \int \frac{(x^2 + 5) - 5}{x^2 + 5} dx = \int \left(1 - \frac{5}{x^2 + 5} \right) dx = \int dx - 5 \int \frac{dx}{x^2 + 5} = \\ &= x - \sqrt{5} \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int (x^4 - 5x^3 + 2) dx$	2. $\int (2\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{2x} + 5) dx$
3. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx$	4. $\int (x-1)(x+2) dx$
5. $\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3} dx$	6. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$
7. $\int \frac{2x - 7}{x^2 - 9} dx$	8. $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$
9. $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$	10. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
11. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx$	12. $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$
13. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$	14. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$
15. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$	16. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$
17. $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} dx$	18. $\int \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$
19. $\int \frac{x^3 + x}{9x^4 + 4} dx$	20. $\int \frac{x^2 - 2}{x + 2} dx$
21. $\int \frac{x - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$	22. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
23. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$	24. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$
25. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$	26. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$
27. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	28. $\int \frac{2x - \sqrt[4]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$
29. $\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x} dx$	30. $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$

§ 3. Интегрирование подстановкой

Если не удаётся найти интеграл $f(x)$ непосредственно, то можно выбрать функцию $x = \varphi(t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $\varphi(t)$ непрерывна в интервале $t \in (\alpha, \beta)$, соответствующем интервалу $x \in (a, b)$;
- 2) дифференцируемая при $t \in (\alpha, \beta)$;
- 3) имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$,

чтобы интеграл $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, стал табличным или более простым.

Примеры с решениями

Пример 1. Найти интеграл: $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2e^x - 3}$.

Решение. Используем формулу $e^x dx = d(e^x) = d(e^x + 1)$ и выделим в знаменателе полный квадрат

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2e^x - 3} = \int \frac{d(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2 - 4} = [e^x + 1 = t] = \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 3} \right| + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int x\sqrt{x+1} dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1} dx &= \left[\begin{array}{c} \text{Замена} \\ \sqrt{x+1} = t; dx = 2t dt \\ x = t^2 - 1 \end{array} \right] = \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 - t^2) dt = \\ &= 2 \int t^4 dt - 2 \int t^2 dt = \frac{2t^5}{5} - 2 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{2(\sqrt{x+1})^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 5} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 5} dx &= \left[\begin{array}{c} \text{Замена} \\ e^{2x} = t; \\ 2e^{2x} dx = dt; e^{2x} dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{5}}{t + \sqrt{5}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{e^{2x} - \sqrt{5}}{e^{2x} + \sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx = \left[\begin{array}{c} \text{Замена} \\ 1 + \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right] = \int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left[\begin{array}{c} \text{Замена} \\ x=\sin t \\ dx=\cos t dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \frac{x^3 dx}{5-x^8}$	2. $\int \frac{e^x dx}{5+4e^x}$
3. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$	4. $\int x^3 \sqrt{2-x^2} dx$
5. $\int x\sqrt{5-x} dx$	6. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+1}}$
7. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}}$	8. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x-1}$
9. $\int \frac{dx}{x \ln x}$	10. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-3}$	12. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$
13. $\int \frac{x+3}{x\sqrt{x-2}} dx$	14. $\int \frac{dx}{x(3+\ln^2 x)}$
15. $\int \frac{e^x + e^{2x}}{1-e^x} dx$	16. $\int \sqrt{1-2\sin x} \cos x dx$
17. $\int \frac{x-1}{1+\sqrt{2x+1}} dx$	18. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$
19. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$
21. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{1-2x}} dx$	22. $\int \sqrt{e^x+1} dx$
23. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$	24. $\int \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$
25. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$	26. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$
27. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$	28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$
29. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$	30. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$

§ 4. Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей теореме.

Теорема 1. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в некотором интервале (a, b) . Пусть в интервале (a, b) функция $v(x) \cdot u'(x)$ имеет первообразную. Тогда в интервале (a, b) функция $u(x) \cdot v'(x)$ также имеет первообразную. При этом справедливо равенство:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Замечание. Определение дифференциала и свойства инвариантности его формы позволяют переписать формулу интегрирования по частям в более короткой форме:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Большая часть интегралов, берущихся с помощью метода интегрирования по частям, может быть разбита на следующие три группы:

1) К *первой группе* относятся интегралы, у которых подынтегральная функция содержит в качестве множителя одну из следующих функций:

$$\ln x; \arcsin x; \arccos x; \operatorname{arctg} x; \operatorname{arcctg} x;$$

при условии, что оставшаяся часть подынтегральной функции представляет собой производную известной функции. Тогда за функцию $u(x)$ берут соответствующую из перечисленных.

2) Ко *второй группе* относятся интегралы вида:

$$\int (ax+b)^n \cos \alpha x dx, \int (ax+b)^n \cdot \sin \alpha x dx, \int (ax+b)e^{\alpha x} dx, \int (ax+b)^n A^{\alpha x} dx,$$

где a, b, α, n, A – некоторые постоянные числа, $A > 0, n \in \mathbb{N}$.

При этом в качестве $u(x)$ следует брать $(ax+b)^n$ и интегрировать по частям n раз.

3) К *третьей группе* относятся интегралы вида:

$$\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx, \int e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx, \int A^{\alpha x} \cos \beta x dx, \\ \int A^{\alpha x} \sin \beta x dx, \int \sin(\ln x) dx, \int \cos(\ln x) dx,$$

где α, β, A – постоянные числа, $A > 0, A \neq 1$.

Такие интегралы берутся двукратным интегрированием по частям при любом выборе $u(x)$. Это приводит к линейному уравнению относительно предложенного интеграла, откуда его и находят.

Примеры с решениями

Пример 1. Найти интеграл $\int x^2 \cdot \operatorname{arctg} x dx$

Решение.

$$\int x^2 \cdot \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x; \quad dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}; \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \\ = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \left[-\frac{x^3}{x^3+x} \mid \frac{x^2+1}{x} \right] = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln |x^2 + 1| + C$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \arcsin x dx$

Решение.

$$\int \arcsin x dx = \left[\begin{array}{l} u = \arcsin x \\ dv = dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{array} \right] = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int x \cdot \sin x dx$

Решение.

$$\int x \cdot \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \cos \sqrt{x} dx$

Решение.

$$\int \cos \sqrt{x} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = 2 \int t \cos t dt = \left[\begin{array}{l} u = t \\ dv = \cos t dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dt \\ v = \sin t \end{array} \right] = 2(t \sin t - \int \sin t dt) =$$

$$= 2(t \sin t + \cos t) + C = 2(\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int x^2 \cdot e^x dx$

Решение.

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = e^x \end{array} \right] = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int e^x \cos 2x dx$

Решение.

$$\int e^x \cos 2x dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \cos 2x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \sin 2x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right] = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} \int e^x \cos 2x dx$$

Далее необходимо решить уравнение:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} \int e^x \cos 2x dx.$$

Пусть $\int e^x \cos 2x dx = J$, тогда уравнение запишется в виде:

$$J = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} J \Rightarrow \frac{5}{4} J = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{5} (2 \sin 2x + \cos 2x) e^x.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \cos(\ln x) dx$

Решение.

$$\int \cos(\ln x) dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx \\ v = x \end{array} \right] = x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \\ v = x \end{array} \right] = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx.$$

Пусть $\int \cos(\ln x) dx = I$, тогда получаем уравнение вида:

$$I = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I$$

$$2I = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

$$I = \frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)).$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int x \sin 3x dx$	2. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
3. $\int \arctg x dx$	4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$

5. $\int \ln(x^2 + 1) dx$	6. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx$
7. $\int (x^2 - 1)e^{-2x} dx$	8. $\int 3^x (7 - x) dx$
9. $\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx$	10. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$
11. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$	12. $\int x \arcsin x dx$
13. $\int x \operatorname{arctg} x dx$	14. $\int 25^x \cdot \sin 25x dx$
15. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$	16. $\int x^2 \sin x dx$
17. $\int x \cos^2 x dx$	18. $\int \arccos x dx$
19. $\int x \ln(x - 1) dx$	20. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$
21. $\int \cos^2(\ln x) dx$	22. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^3}} dx$
23. $\int (3x + 5)e^{-\frac{x}{2}} dx$	24. $\int (2x^2 + 4) \cdot 5^{-x} dx$
25. $\int e^{3x} \sin x dx$	26. $\int \sin(\ln x) dx$
27. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	28. $\int e^{ax} \cos bxdx$
29. $\int \frac{\ln x}{(x + 1)^2} dx$	30. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1} dx$

Литература

1. Захарова Т. Э. Математический анализ: Учебное пособие (специальность «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», факультет АЭС) / СибГУТИ – Новосибирск, 2013. – 51 с.
2. Рудаковская Е. Г., Аверина О. В., Воронов С. М., Старшова Т. Н., Хлынова Т. В., Ригер Т. В. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной (примеры и задачи): учеб. пособие – М.: РХТУ им. Д. И. Менделеева, 2013. – 132 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для студентов вузов. В 2-х ч. Ч. I/ — М.: Мир и образование, 2024. – 816 с.
4. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов. — М.: Лаборатория знаний, 2023. — 672 с.