**Лекция 1. Геометрические построения на плоскости. Схема решения задач на построение.**

**План**

1. Введение.
2. Общие аксиомы конструктивной геометрии. Аксиомы математических инструментов.
3. Постановка задачи на построение.
4. Методика решения задач на построение.

**Введение**

Будущим учителям, в школьном курсе математики придется учить ребят решению задач на построение. Целесообразность этой деятельности обусловлена тем, что задачи на построение развивают конструктивное и логическое мышление, прививают навыки исследователя. Поэтому эти задачи составляют важную часть школьного курса геометрии.

**Общие аксиомы конструктивной геометрии. Аксиомы математических инструментов.**

Раздел геометрии, в котором изучаются геометрические построения, называется конструктивной геометрией.

Основным понятием конструктивной геометрии является понятие построить геометрическую фигуру.

Это понятие принимается без определения, конкретный его смысл известен из практики, где оно означает: начертить, провести (линию), отметить (точку). В интересах логической строгости изложения основное понятие конструктивной геометрии - построить фигуру - характеризуется через основные требования (общие аксиомы конструктивной геометрии).

Эти требования обычно не формулируются в пределах школьного курса геометрии, но они подразумеваются в процессе решения любой геометрической задачи на построение как нечто само собою разумеющееся. Общие аксиомы конструктивной геометрии выражают в абстрактной форме наиболее существенные моменты многовековой чертежной практики и составляют логическую основу конструктивной геометрии.

Рассмотрим эти общие аксиомы теории геометрии.

I. Каждая данная фигура построена, т.е. если о какой-либо фигуре сказано, что она дана, то под этим подразумевается, что она уже изображена, начерчена, по-другому говоря, построена.

2. Если даны две фигуры, то построено:

а) их объединение

б) пересечение (если оно непустое)

в) разность (если она не равна пустому множеству)

3. Если дана некоторая фигура, то можно построить точку:

а) принадлежащую данной фигуре

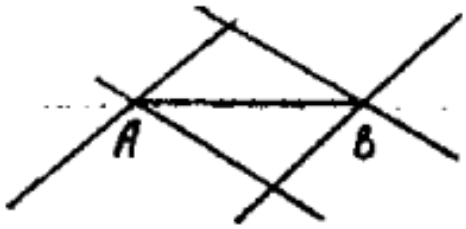
б) не принадлежащую ей.
Замечание. Аксиомы 3а и 3б дают возможность построить новые точки, но этим точкам не приписывают никаких свойств. Для построения новых точек, обладающих определенными свойствами, пользуются математическими инструментами: линейкой, циркулем, углом и т.д. Свойства указанных математических инструментов описываются с помощью соответствующих аксиом. При этом следует четко видеть разницу между математическим инструментом конструктивной геометрии и их физическим олицетворением.

Аксиома линейки. Линейка (односторонняя) позволяет построить прямую, проходящую через две данные точки.

Аксиома циркуля. Циркуль позволяет построить окружность с центром в данной точке и радиусом, равным длине данного отрезка.

Аксиомы двусторонней линейки. Двусторонняя линейка позволяет:

а) выполнить любое построение, выполнимое линейкой;




б) в каждой из полуплоскостей, определяемых построенной прямой, построить прямую, параллельную этой прямой и проходящую от нее на расстоянии h, где h - фиксированный элемент для данной двусторонней линейки (ширина);




в) если построены две точки A и B, то установить, будет ли AB $> h$, и если $AB > h$, то построить 2 пары параллельных прямых, проходящих соответственно через A и B и отстоящих одна от другой на расстоянии h, Аксиомы угла. Угол позволяет: а) сделать все построения, выполнимые линейкой; б) через данную точку плоскости провести под углом α к некоторой данной прямой; в) если построены отрезок AB и фигура Ф, то установить, содержит ли фигура Ф точку, из которой отрезок AB виден под углом α, и если такая существует, то построить ее.

## Постановка задачи на построение

Задача на построение состоит, в том, что требуется построить указанными инструментами фигуру, если дана некоторая другая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и данной.

Каждая фигура, удовлетворяющая условию задачи, называется решением задач.

Построения, о возможности которых оказано в аксиоме 3, вместе с построениями, перечисленными в аксиомах математических инструментов, назовем основными построениями (ОП).

Найти решение задачи на построение - значит указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых искомая фигура будет считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии.

Перечень основных построений, а, следовательно, и ход решения задачи, зависит от употребляемого набора инструментов. Следует заметить, что такой подход в определении нахождения решения не рациональный. Иногда целесообразнее укрупнить шаги построения.

Рассматривают как шаг построения целые блоки основных построений. Эти блоки представляют собой решения элементарных задач на построение. Их назовем элементарными построениями. Тогда можно дать следующее определение.

Решить задачу на построение - это значит указать такую конечную последовательность основных (ОП) и элементарных построений (ЭП), после выполнения которых искомая фигура может считаться построенной в силу общих аксиом конструктивной геометрий.

В качестве элементарных построений (ЭП) возьмем следующие задачи.

ЭП I. Отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному отрезку.

ЭП 2. Отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу. ЭП 3. Построить треугольник по трем сторонам.

ЭП 4. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

ЭП 5. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам.

ЭП 6. Построить биссектрису данного неразвернутого угла.

ЭП 7. Построить серединный перпендикуляр данного отрезка.

ЭП 8. Построить середину данного отрезка.

ЭП 9. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой. (При этом данная точка может лежать на данной прямой, может и не лежать на ней).

ЭП 10. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

ЭП 11. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе.

ЭП 12. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

ЭП 13. Построить касательную к окружности, проходящую через данную на ней точку.

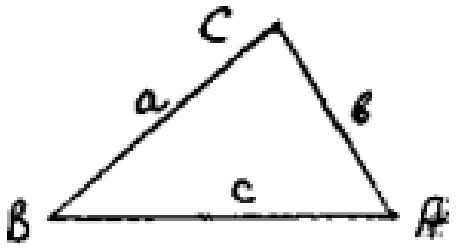
Иногда условиям задачи на построение удовлетворяют несколько фигур.

Решить задачу на построение - значит найти все ее решения. Поясним это определение.

Фигуры, удовлетворяющие условию задачи, могут отличаться размерами, формой и положением на плоскости. Фигуры, удовлетворяющие условию задачи, отличающиеся размерами или формой, будем считать различными. С расположением дело обстоит так.

Если условие задачи не предусматривает определенного расположения искомой фигуры относительно данных фигур, то задача считается решенной, если: а) построено некоторое число неравных фигур $\Phi_1$, …, $\Phi_n$ удовлетворяющих условию задачи, и б) доказано, что всякая фигура, удовлетворяющая условию задачи, равна одной из них; считается, что задача имеет n решений (о точностью до равенства).

Если условие задачи предусматривает определенное расположение искомой фигуры относительно какой-либо данной фигуры, то задача считается решенной, если: а) построено некоторое число фигур, удовлетворяющих условию задачи, и б) доказано, что любая фигура, удовлетворяющая условию задачи, совпадает с одной из них. При этом равные фигуры, но различно расположенные, считаются различными решениями. Приведем примеры.




Пример 1. Построить циркулем и линейкой треугольник по трем сторонам. Точный смысл: построить треугольник так, чтобы три его стороны были равны трем данным отрезкам. Условие задачи не предусматривает определенного расположения искомой фигуры относительно данных фигур. По нашей договоренности решение такой задачи ищется с точностью до равенства. Так как все треугольники по трем сторонам равны, то задача имеет одно решение, если сумма любых двух сторон больше третьей, и не имеет решения, если это условие не выполнено.

Пример 2. Построить циркулем и линейкой треугольник так, чтобы одной его стороной служил данный отрезок АВ , а две другие его стороны были равны двум данным отрезкам а и в.

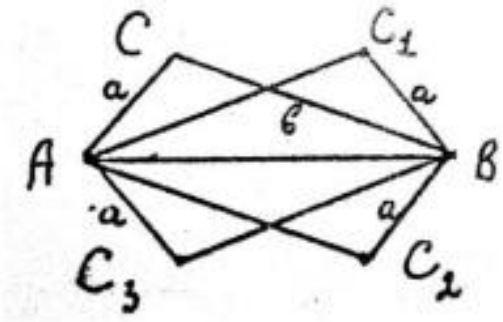
В этом случае условие задачи предусматривает определенное расположение искомого ΔАВС относительно данных фигур. В соответствии с нашим соглашением равные треугольники, удовлетворяющие условию задачи, но отличающиеся расположением, будем считать разными решениями этой задачи.

Замечание. Встречаются задачи, имеющие бесконечное множество решений. Такие задачи называются неопределенными. Очевидно, все решения нельзя построить. В связи с этим вопросом: когда же считать неопределенную задачу решенной?

Решение неопределенной задачи ищется в параметрической форме: указывается прием построения фигур, удовлетворяющих условию задачи, причем эти фигуры определяются выбором определенного положения одной

точки на некоторой данной фигуре. Эти точки играют роль геометрического параметра. Задача считается решенной, если при всевозможных допустимых положениях произвольной точки возникают все фигуры, удовлетворяющие




условию задачи.

Встречаются задачи такие, что не существуют фигура удовлетворяющие условию задачи. Например, в параллелограмм (не ромб) нельзя вписать окружность. Нельзя провести прямую через 2 данные точки одним лишь циркулем.

Во всех этих случаях решить задачу на построение - значит доказать, что искомая фигура не существует, или доказать, что она не может быть построена данными средствами.

Условие задачи часто дает известный простор в выборе данных.

Например, если требуется построить треугольник по трем сторонам, то данными являются три отрезка, которые могут быть произвольными по величине и положению. Задача в такой формулировке считается решенной, если она решена для всех принципиально различных предположений относительно выбора данных.

Может оказаться, что при таком выборе данных задача решается иначе, чем при другом их выборе, поэтому приходится рассматривать ряд отдельных случаев и давать решение задачи для каждого из них.

**Методика решения задач на построение**

При решении сложных задач основную трудность представляет вопрос о том, как найти способ решения. Решение этого вопроса облегчается, если придерживаться определенной схемы рассуждений. Эта схема состоит их четырех этапов: анализ, построение, доказательство, исследование. Заметим, что эта классическая схема не является, безусловно, необходимой и неизменной. Допустимы отклонения в зависимости от задачи.

1. Анализ. В анализе ведется поиск решения задачи следующим образом: предполагают задачу решенной, строят (от руки) искомую фигуру пристраивают к ней данные с учетом тех отношений, которые указаны в условии задачи. Подмечают, что построение искомой фигуры Ф сводится к построению другой фигуры $\Phi_1$, построение $\Phi_1$ сводят к построению $\Phi_2$ и т.д. После конечного числа шагов можно прийти к некоторой фигуре $\Phi_n$, построение которой известно. Если на вспомогательном чертеже не удастся найти ход решения, то целесообразно ввести в чертеж вспомогательные

фигуры: сделать дополнительные построения, сделать геометрические преобразования и т.д.

2. Построение состоит в указании конечной последовательности основных построений (или ранее решенных задач), которые достаточно произвести, чтобы искомая фигура была построена.

Построение обычно сопровождается графическим оформлением каждого шага с помощью указанных инструментов.

3. Доказательство имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет условию задачи. Доказательство проводится в предположении, что каждый шаг построения может быть выполнен.

4. Исследование. При анализе, построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, предполагая выполнимость шагов построения. Идя полного решения задачи нужно выяснить:

1) всегда ли (т.е. при любом ли выборе данных) можно выполнить построения избранным способом;

2) можно ли и как построить искомую фигуру, если для какого-нибудь выбора данных указанный способ построения не пригоден;

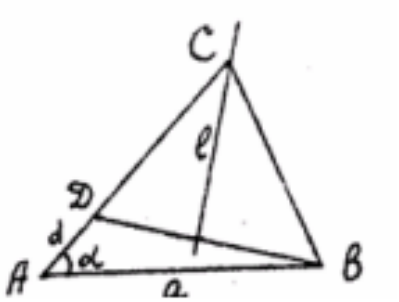
3) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных.

Эти вопросы составляют содержание исследования. Итак, исследование ставит цель - установить условия разрешимости и определить число решений.

Практически исследование проводят по ходу построения, рассматривая каждый шаг построения на возможность и единственность.

Однако такое исследование связано с данным способом построения. В этом случае остается открытым вопрос: нет ли других решений при другом способе решения. На этот вопрос отвечают с помощью указанного выше приема: доказывают, что произвольное решение данной задачи совпадает с одним из уже полученных решений.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий пример.

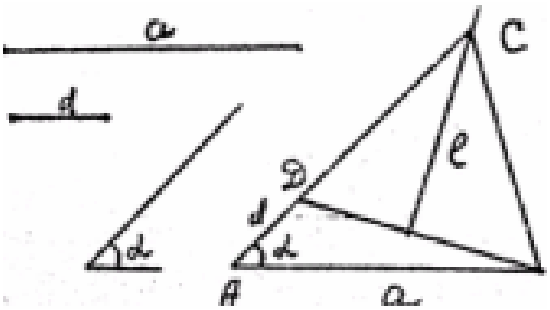



Задача. Построить треугольник, если известны: длина основания $a$, угол при основании α и разность двух других сторон d.

Решение. Заметим, что в условии задачи не указаны инструменты. В таких случаях будем пола гать (как и в школе), что задачу надо решить с помощью линейки и циркуля.

Анализ. Поиск решения задачи проведем, полагая задачу решенной. Пусть ΔABC - искомый треугольник: $AB = a, AC - BC = AD = d, \widehat{BAD} = \alpha$. Замечаем, что ΔABD - определен по двум сторонам и углу между ними.

Третья вершина C искомого треугольника может быть найдена как точка пересечения луча AD и прямой l - серединного перпендикуляра отрезка BD). Иначе говоря, план решения найден, отроим треугольник ΔABD, а затем и третью вершину C.




Построение. В этом пункте реализуем план решения.

Строим последовательно:

1) $\Delta ABD, AB = a, AD = d, \widehat{\mathrm{BAD}} = \alpha$;

2) $l -$

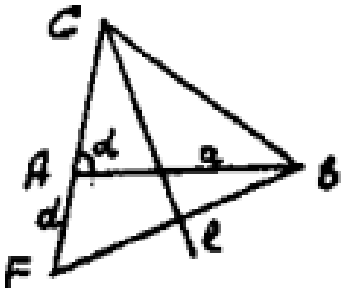
серединный перпендикуляр отрезка $BD$;

3) $C, C = [AD \cap l[$.

Треугольник ΔABC – искомый.

Доказательство. Действительно, ΔABC удовлетворяет всем условиям задачи, т.к. по построению : $AB = a, AC - BC = AD = d, \widehat{\mathrm{BAD}} = \alpha$.

Исследование. Проверил каждый шаг построения на осуществимость и единственность. Первый шаг возможен и единственен тогда и только тогда, когда $0 < \alpha < a\cos\alpha$. Действительно, если $d < a\cos\alpha$, то прямая $l$ пересекает луч $AD$. Если же $d = a\cos\alpha$, то $l$ и $AD$, поэтому треугольника, удовлетворяющего условию задачи, не существует. В том случае, когда $d < a\cos\alpha$, прямая $l$ пересекает луч $DA$. В этом случае также задача не имеет решения.




Но вернемся к анализу. У нас задача решена, предполагая, что α лежит против меньшей из двух боковых сторон. Если α лежит против большей стороны, то предыдущий метод построения не проходит. Как быть? По теории мы должны и для этого случая дать решение. Нетрудно убедиться, что $\Delta ABF$ определен ($a, d$ и угол $\pi - \alpha$). Построение, доказательство и исследование проводятся так же, как и выше.

Необходимо еще выяснить: все ли решения найдены. Да, все, так как если бы каким-то способом построить треугольник по $a, d$ и $\alpha$ то этот треугольник был бы равен одному из указанных треугольников (это легко доказать).