

**Лекция №3. Нормальное распределение. закон больших чисел,
основные теоремы**

**10. Нормальное распределение: плотность распределения, его
числовые характеристики. Применение нормального распределения.**

Правило трех сигм. Центральная предельная теорема.

Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный закон распределения (закон Гаусса)* с параметрами a и σ^2 , если её плотность вероятности имеет вид:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Числовые характеристики:

$$M(X) = a, D(X) = \sigma^2.$$

Нормальный закон с параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$ называется стандартным или нормированным и обозначается $N(0,1)$.

Функция распределения случайной величины X , распределенной по нормальному закону, выражается по формуле:

$$F_N(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Свойства случайной величины, распределенной по нормальному закону:

1. $P(x_1 \leq x \leq x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$, где $t_1 = \frac{x_1-a}{\sigma}, t_2 = \frac{x_2-a}{\sigma}$.
2. Вероятность того, что отклонение случайной величины X , распределенной по нормальному закону, от математического ожидания не превысит величину $\Delta > 0$, равна

$$P(|X - a| \leq \Delta) = 2\Phi(t) - 1, \text{ где } t = \frac{\Delta}{\sigma}.$$

Из второго свойства вытекает правило трёх сигм:

Если случайная величина X , распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2 , то практически достоверно, что её значения заключены в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. Это следует из того, что если положить $\Delta = 3\sigma$, то

$$P(|X - a| \leq 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973 \approx 1.$$

Имеет место центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных величин:

Теорема. Если $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$ — независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 , то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

неограниченно приближается к нормальному.

11. Понятие о законе больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева и ее применение. Теорема Бернулли.

В начале курса мы уже говорили о том, что математические законы теории вероятностей получены абстрагированием реальных статистических закономерностей, свойственных массовым случайным явлениям. Наличие этих закономерностей связано именно с массовостью явлений, то есть с большим числом выполняемых однородных опытов или с большим числом складывающихся случайных воздействий, порождающих в своей совокупности случайную величину, подчиненную вполне определенному закону. Свойство устойчивости массовых случайных явлений известно человечеству еще с глубокой древности. В какой бы области оно ни проявлялось, суть его сводится к следующему: конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате массы таких явлений; случайные отклонения от среднего, неизбежные в каждом отдельном явлении, в массе взаимно погашаются, нивелируются, выравниваются. Именно эта устойчивость средних и представляет собой физическое содержание «закона больших чисел», понимаемого в широком смысле слова: при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности. В узком смысле слова под «законом больших чисел» в теории вероятностей понимается ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным.

Мы уже упоминали простейшую теорему Бернулли, когда говорили о том, что при большом числе опытов частота события приближается к вероятности этого события (точнее – сходится по вероятности).

Вначале сформулируем важное неравенство Чебышева.

Пусть имеется случайная величина X с математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x . Неравенство Чебышева утверждает, что, каково бы ни было положительное число α , вероятность того, что величина X отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на α , ограничена сверху величиной $\frac{D_x}{\alpha^2}$:

$$P(|X - m_x| \geq \alpha) \leq \frac{D_x}{\alpha^2}. \quad (13.2.1)$$

Теорема Чебышева устанавливает в точной количественной форме свойство устойчивости среднего арифметического. Она формулируется следующим образом:

При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.

Запишем теорему Чебышева в виде формулы. Для этого напомним смысл термина «сходится по вероятности». Говорят, что случайная величина X_n сходится по вероятности к величине a , если при увеличении n вероятность того, что X_n и a будут сколь угодно близки, неограниченно приближается к единице, а это значит, что при достаточно большом n

$$P(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

где ε, δ — произвольно малые положительные числа.

Запишем в аналогичной форме теорему Чебышева. Она утверждает,

что при увеличении n среднее арифметическое $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ сходится по вероятности к m_x , т. е.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \quad (13.3.1)$$

Известная теорема Я. Бернулли, устанавливающая связь между частотой события и его вероятностью, может быть доказана как прямое следствие закона больших чисел.

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A , вероятность которого в каждом опыте равна p . Теорема Я. Бернулли утверждает, что *при неограниченном увеличении числа опытов n частота события A сходится по вероятности к его вероятности p .*

Обозначим частоту события A в n опытах через P^* и запишем теорему Я. Бернулли в виде формулы

$$P(|P^* - p| < \epsilon) > 1 - \delta, \quad (13.5.1)$$

где ϵ, δ — сколь угодно малые положительные числа.