Лекция №1

Тема. Введение в исследование операций. Симметричная (стандартная) и каноническая (основная) формы записи ЗЛП.

1. **Исследование операций, как научная дисциплина.**

Исследование операций – научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.

Целью исследования операций является количественное обоснование принимаемых решений по организации управления.

Управление любой системой реализуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Их знание помогает определить условия, необходимые и достаточные для осуществления данного процесса. Для этого все параметры, характеризующие процесс и внешние условия, должны быть количественно определены, измерены.

Применение методов исследования операций предполагает:

1. Построение экономических и математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;
2. Изучение взаимосвязей, определяющих в последствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия.

2. **Основные понятия исследования операций.**

Операция–это любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели. Результат операции зависит от способа ее проведения, организации, иначе – от выбора некоторых параметров**.**

Набор управляющих параметров (переменных) при проведении операции называется **решением.**
Решение называется **допустимым,** если оно удовлетворяет набору определенных условий.
Оптимальным называется решение**,** если оно допустимо и, по определенным признакам, предпочтительнее других, или, по крайней мере, не хуже.
Признак предпочтения называется **критерием оптимальности.** Критерий оптимальности включает в себя ***целевую функцию*** и ***направление оптимизации*** или набор целевых функций и соответствующих направлений оптимизации.
Целевая функция - это количественный показатель предпочтительности или эффективности решений.
Направление оптимизации - это *максимум (минимум),* если наиболее предпочтительным является наибольшее (наименьшее) значение целевой

функции. Например, критерием может быть максимизация прибыли либо минимизация расходов.

Эффективность операции – степень ее приспособленности к выполнению задачи – количественно выражается в виде критерия эффективности – целевой функции.

Модель операции это достаточно точное описание операции с помощью математического аппарата (различного рода функций, уравнений, систем уравнений и неравенств и т.п.).

3. Экономико –математическая модель.

Для применения количественных методов исследования необходимо построить математическую модель операции.

Модель- это наиболее точное описание процесса с помощью математического аппарата (уравнений, неравенств, функции и т.д.)

Выполняется перевод описательной модели на формальный математический язык. Необходимо, чтобы выбранная модель адекватно отражала реальность. От выбора математической модели во многом зависит успех выполнения последующих этапов. Построение математической модели — сложный творческий процесс, требующий глубоких теоретических и практических знаний.Для задач математического программирования все условия, налагаемые на неизвестные, записываются в виде системы ограничений (уравнений и неравенств). Критерий оптимальности записывается в виде функции, которую называют *целевой.* Решение задачи оптимизации состоит в отыскании на множестве решений системы ограничений наибольшего или наименьшего значения целевой функции.

Математическая модель задачи ИСО включает в себя:

1) описание переменных, которые необходимо найти,
2) описание критериев оптимальности,
3) описание множества допустимых решений (ограничений, накладываемых на переменные). Цель ИСО - количественно и качественно обосновать принимаемое решение. Окончательное решение принимает ответственное лицо (либо группа лиц), называемое **лицо, принимающее решение (ЛПР).**

Математическая модель задачи ИСО составляется в соответствии с представлениями ЛПРоб этой задаче, т.е. в соответствии с его *информационным состоянием.* При этом важно, чтобы математическая модель задачи была наиболее *адекватной,* т.е. наиболее правильно отражала информационное состояние ЛПР. Для этого разработчик математической модели должен работать в тесном контакте с ЛПР.

> Основной принцип разработчика: ***“Разрабатывай не то, что заказчик просит, а то, что ему нужно.”***

Эффективность операции – это степень ее приспособленности к выполнению задачи – количественно выражается в виде критерия эффективности – целевой функции.

4. Общая постановка задач исследования операций.

При построении моделей задач ИСО очень важно усвоить его методологию.

Все факторы, входящие в описание той или инойоперации можно разделить на две группы:

1) ***Постоянные факторы,*** на которые мы не можем влиять (условия проведения операции); обозначим их через $\alpha_{1,}\alpha_{2,\ldots;}$

2) **Зависимые факторы**, которые мы можем выбирать по своему усмотрению в известных пределах (элементы решения); бозночим их через $x_1, x_2,\ldots;$

Целевая функция- критерий эффективности- зависит от факторов обеих групп. Тогда целевую функцию F можно записать в следующем виде:
F= f($x_1, x_2,\ldots, \alpha_{1,}\alpha_{2,\ldots}$**).**

Все задачи ИСО можно классифицировать в зависимости от природы и свойства операций, характера решаемых задач, особенностей применяемых математических методов. Среди них огромное место занимают оптимизационные задачи.

Оптимизационные задачи – это задачи на оптимизацию планирования и управления экономическими системами.

Сформулируем эту задачу в общем виде:

Найти переменные $x_1,x_2,\ldots,x_{п,}$ удовлетворяющие системе неравенств (уравнений)

$$\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_п)\leq b_i, \quad i=1,2,\ldots,m$$
$$x_i\geq 0 \qquad (1)$$

И при которых целевая функция достигает своего максимума (минимума) т.е.

$$F= f(x_1, x_2,\ldots, x_n)\rightarrow max\ (min) \qquad (2)$$

Если функции f и φ_i в (1) - (2) дважды дифференцируемы, то можно применить классические методы оптимизации, но это весьма сложно. Если множество допустимых значений аргумента дискретно или функция задана таблично, классический метод не работает и тогда применяют методы математического программирования.

Различают некоторые задачи ИСО, в зависимости от критерии эффективности $F= f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ (2) и функции $\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_п)$ в системе ограничений (1).

Если по смыслу задачи , ее решения – целые числа, то это задача целочисленного линейного программирования.

Если функция (2) и функции (1) задаются нелинейными функциями, то это задачей нелинейного программирования.

Если в задаче имеется переменная времени и функция (2) выражается не в явном виде, а косвенно – через уравнения, описывающие протекание операции во времени, то это задача динамического программирования и т.д.
Из перечисленных методов математического программирования распространенным является линейное программирование, на котором мы и остановимся.
Из перечисленных методов математического программирования наиболее распространенным и разработанным является линейное программирование. В его рамки укладывается широкий круг задач исследования операций

По содержательной постановке различают ряд типов задач исследования операций:

1. Задача сетевого планирования и управления.
2. Задача массового обслуживания.
3. Задача управления запасами.
4. Задача распределения ресурсов.
5. Задача ремонта и замены оборудования.
6. Задача составления расписаний.
7. Задача планировки и размещения.
8. Задача выбора маршрута.
9. Задачи теории игр и т.д.

Методы исследования операций, как и любые математические методы, всегда в той или иной мере упрощают, огрубляют задачу, отражая порой нелинейные процессы линейными моделями, стохастические системы — детерминированными, динамические процессы — статическими моделями и т.д.

Примеры задач линейного программирования.

1. **Задача об использовании ресурсов.**

Для изготовления двух видов продукции P_1 иP_2 используются 4 вида ресурсов S_1,S_2,S_3 и S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, даны в таблице.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-
Прибыль от единицы продукции		2	3

Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Р е ш е н и е. Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_1, x_2 — число единиц продукции соответственно P_1 и P_2, запланированных к производству. Для их изготовления (см. табл. 1.1) потребуется $(1 \cdot x_1 + 3x_2)$ единиц ресурса S_1, $(2x_1 + 1 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_2, $(1 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_3 и $3x_1$ единиц ресурса S_4. Так как потребление ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4 не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21. \end{cases} \qquad \textbf{(1.1)}$$

По смыслу задачи переменные

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad \textbf{(1.2)}$$

Суммарная прибыль F составит $2x_1$ руб. от реализации продукции P_1 и $3x_2$ руб. — от реализации продукции P_2, т.е.

$$F = 2x_1 + 3x_2. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: *найти такой план выпуска продукции* $X = (x_1, x_2)$, *удовлетворяющий системе* (1.1) *и условию* (1.2), *при котором функция* (1.3) *принимает максимальное значение.*▶

2. Задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях).

1.2. Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в табл. 1.2 (цифры условные).

Таблица 1.2

Питательное вещество (витамин)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 руб.

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_1, x_2 — количество кормов I и II, входящих в дневной рацион. Тогда этот рацион (см. табл. 1.2) будет включать $(3x_1 + 1\cdot x_2)$ единиц питательного вещества S_1, $(1\cdot x_1 + 2x_2)$ единиц вещества S_2 и $(1\cdot x_1 + 6x_2)$ единиц питательного вещества S_3. Так как содержание питательных веществ S_1, S_2 и S_3 в рационе должно быть не менее соответственно 9, 8 и 12 единиц, то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases} \qquad \textbf{(1.7)}$$

Кроме того, переменные

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \qquad \textbf{(1.8)}$$

Общая стоимость рациона составит (в руб.)

$$F = 4x_1 + 6x_2. \qquad \textbf{(1.9)}$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: *составить дневной рацион* $X = (x_1, x_2)$, *удовлетворяющий системе* (1.7) *и условию* (1.8), *при котором функция* (1.9) *принимает минимальное значение.*▶

3.Задача о раскрое.

1.3. Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить экономико-математическую модель задачи.

Р е ш е н и е. Прежде всего определим всевозможные способы распила бревен, указав соответствующее число получаемых при этом брусьев (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Способ распила i	Число получаемых брусьев длиной, м		
	1,2	3,0	5,0
1	5	—	—
2	2	1	—
3	—	2	—
4	—	—	1

Обозначим: x_i — число бревен, распиленных i-м способом ($i = 1, 2, 3, 4$); x — число комплектов брусьев.

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид:

$$F = x \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195, \\ 5x_1 + 2x_2 = 2x, \\ x_2 + 2x_3 = x, \\ x_4 = 3x, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4).\blacktriangleright$$

Общая задача линейного программирования. Различные формы ЗЛП.

В общем случае задача линейного программирования сводится к отысканию такого решения $X=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ системы m линейных уравнений с n переменными (***системы ограничений***)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_{ij}\geq 0\ (j=1,2,\ldots,n),$$

при котором ***целевая функция*** (линейная форма) $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Всякое неотрицательное решение системы (1) называется ***допустимым решением***, или ***планом***.

Решение $X=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$, при котором функция Z обращается в оптимум, называется ***оптимальным решением*** или ***оптимальным планом***. В отыскании этого оптимального решения и состоит задача линейного программирования.

Как правило, оптимальное решение единственно. Однако это не всегда так. Возможны случаи, когда оптимальных решений оказывается бесконечное множество.

В задачах линейного программирования коэффициенты a_{ij},b_j,c_j – заданные постоянные величины, а число уравнений меньше числа переменных, т.е. $m<n$ (согласно теореме Кронекера – Капелли для совместности системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы этой системы. Этот общий ранг не может превосходить числа n неизвестных. При $m=n$ решение системы единственно).

Без ограничения общности можно считать, что все правые части системы неотрицательны, т.е. $b_i\geq 0\ \ (i=1,2,\ldots,m)$. Если в некоторых уравнениях системы это условие нарушено, то можно умножить обе части таких уравнений на -1.

В более короткой форме задача линейного программирования записывается так: найти решение $X=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ системы ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1,2,\ldots,m),$$

приводящее к оптимуму линейную форму

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условии, что $x_j \geq 0$ $(j = 1,2,\ldots,n)$.

Эта же система может быть записана в ***векторной форме***:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B, \ Z = C \cdot X,$$

где символ « · » – знак скалярного произведения

$$C = (c_1; c_2; \ldots; c_n), X = (x_1; x_2; \ldots; x_n),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Еще для записи системы ограничений используется ***матричная форма***: $Z = C \cdot X$ при ограничениях $AX = B$, где

$$C = (c_1 \ c_2 \ \ldots c_n) \text{ (матрица-строка)},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ (матрица-столбец)}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ (матрица-столбец)},$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют матрицей условий задач, B – матрицей ограничений.

Задача линейного программирования, система ограничений которой задана в виде системы уравнений (1), называется ***канонической***.

В большинстве задач ограничения задаются не в виде системы уравнений, а в виде системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \quad (2)$$

или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m. \end{cases} \quad (3)$$

Наконец, система ограничений может быть смешанной: часть ограничений – неравенства типа (2), часть – типа (3), часть задана в виде уравнений.

Однако любую систему ограничений можно привести к системе уравнений вида (1). Для этого достаточно к левой части каждого неравенства (2) прибавить (отнять, если система задана в виде (3)) какое-то неотрицательное число – добавочную переменную, чтобы каждое неравенство обратилось в уравнение:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

где $x_{n+i} \ge 0 \ \ (i = 1,2,\ldots,m)$.

В результате вместо системы неравенств (2) получили систему ограничений, аналогичную системе (1).

В случае смешанных систем ограничений число добавочных переменных равно $(m - t)$, где m – общее число ограничений системы, t – число ограничений в виде уравнений.

Таким образом, как бы ни были первоначально заданы ограничения задачи линейного программирования, их всегда можно привести к системе линейных уравнений, используя для этой цели добавочные переменные, т.е. свести задачу к канонической.

Будем считать, что все m уравнений системы (1) линейно независимы. В противном случае из системы можно исключить часть уравнений так, чтобы уравнения системы стали линейно независимыми.

Совместная система m линейных уравнений с n переменными $(m < n)$ имеет бесконечное множество решений, в том числе и допустимых (не имеющих отрицательных компонент).

Допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных основных (базисных) переменных и $(n-m)$ неосновных (небазисных, или свободных). Неосновные переменные в базисном решении равны нулю.

Основные переменные, как правило, отличны от нуля, т.е. являются положительными числами.

Если хотя бы одна из основных переменных принимает нулевое значение, то соответствующее базисное решение называется ***вырожденным***.

Любое неотрицательное базисное решение системы ограничений задачи линейного программирования, заданной в канонической форме, называется ***опорным решением*** или ***опорным планом***.

Опорный план называется ***невырожденным***, если он содержит m положительных компонент, в противном случае опорный план называется ***вырожденным***.

Если система ограничений (1) состоит лишь из одних неравенств, то ЗЛП называется **стандартной.**

Если система ограничений состоит из одних уравнений, то ЗЛП называется **канонической.**

Любая ЗЛП может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче.

Чтобы ЗЛП из стандартной перевести в каноническую в каждое из неравенств системы ограничений вводим дополнительные неотрицательные переменные $x_{n+1}, x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$. Если неравенство вида «$\leq$ », то дополнительные переменные вводятся со знаком «+», в случая неравенства вида «$\geq$» - со знаком « - ».