Лекция №4.

Тема. Симплексные таблицы. Метод искусственного базиса.

План:

1. Алгоритм составления симплексных таблиц.

Практические расчеты при решении реальных задач симплексным методом выполняются в настоящее время с помощью компьютеров. Однако если расчеты осуществляются без ЭВМ, то удобно использовать так называемые симплексные таблицы. Далее мы рассмотрим алгоритм их составления, не углубляясь в его подробное обоснование. Для определенности считаем, что решается задача на отыскание максимума.

I. После введения добавочных переменных систему уравнений и линейную функцию записываем в виде, который называется *расширенной системой*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ F - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0. \end{cases}$$

Предполагаем, что все добавочные переменные имеют тот же знак, что и свободные члены; в противном случае используем так называемый *М-метод,* который будет рассмотрен ниже.

II. Исходную расширенную систему заносим в первую симплексную таблицу. Последняя строка таблицы, в которой приведено уравнение для линейной функции цели, называется *оценочной.* В ней указываются коэффициенты функции цели с противоположным знаком: $b_i = -c_i$. В левом столбце таблицы записываем основные переменные (базис), в первой строке таблицы — все переменные (отмечая при этом основные), во втором столбце — свободные члены расширенной системы b_1, b_2, ..., b_m. Последний столбец подготовлен для оценочных отношений, необходимых при расчете наибольшего возможного значения переменной. В рабочую часть таблицы (начиная с третьего столбца и второй строки) занесены коэффициенты a_{ij} при переменных из расширенной системы. Далее таблица преобразуется по определенным правилам.

III. Проверяем выполнение критерия оптимальности при решении задачи на максимум — наличие в последней строке отрицательных коэффициентов $b_i < 0$ ($c_i > 0$). Если таких нет, то решение оптимально, достигнут max $F = c_0$ (в левом нижнем углу таблицы), основные переменные принимают значения a_{i0} (второй столбец), основные переменные равны 0, т.е. получаем оптимальное базисное решение.

IV. Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный коэффициент $b_t < 0$ в последней строке определяет *разрешающий столбец s.*

Составляем оценочные ограничения каждой строки по следующим правилам:

1) ∞, если b_t и a_{ts} имеют разные знаки;
2) ∞, если $b_t = 0$ и $a_{ts} < 0$;
3) ∞, если $a_{ts} = 0$;
4) 0, если $b_t = 0$ и $a_{ts} > 0$;
5) $\left|\frac{b_t}{a_{ts}}\right|$, если a_{t0} и a_{ts} имеют одинаковые знаки.

Определяем $\min_t\left\{\left|\frac{b_t}{a_{ts}}\right|\right\}$. Если конечного минимума нет, то задача не имеет конечного оптимума ($F_{\max} = \infty$). Если минимум конечен, то выбираем строку q, на которой он достигается (любую, если их несколько), и называем ее *разрешающей строкой.* На пересечении разрешающих строки и столбца находится *разрешающий элемент* a_{qs}.

V. Переходим к следующей таблице по правилам:

а) в левом столбце записываем новый базис: вместо основной переменной x_q — переменную x_s;

б) в столбцах, соответствующих основным переменным, проставляем нули и единицы: 1 — против "своей" основной переменной, 0 — против "чужой" основной переменной, 0 — в последней строке для всех основных переменных;

в) новую строку с номером q получаем из старой делением на разрешающий элемент a_{qs};

г) все остальные элементы a'_{ij} вычисляем по *правилу прямоугольника*:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}},$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}}.$$

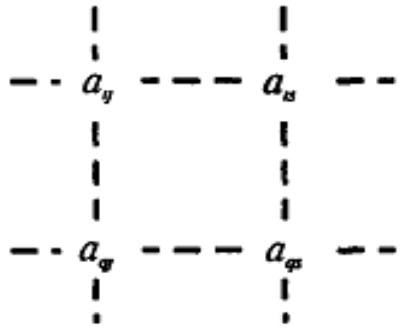


Рис. 5.4

Далее переходим к п. III алгоритма.

▷ **5.10.** Решить задачу об использовании ресурсов, приведенную в разд. 1.2, с помощью симплексных таблиц[1].

Р е ш е н и е . Расширенная система задачи имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_6 = 21. \end{cases}$$

Линейную функцию представим в виде $F - 2x_1 - 3x_2 = 0$.

Заполняем первую симплексную таблицу (табл. 5.1), в которой переменные x_3, x_4, x_5, x_6 основные. Последняя строка заполняется коэффициентами линейной функции с противоположным знаком (см. п. II алгоритма).

Таблица 5.1

	Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	x_3	18	1	3	1	0	0	0	18/3
	x_4	16	2	1	0	1	0	0	16
→	x_5	5	0	1	0	0	1	0	5 ←
	x_6	21	3	0	0	0	0	1	∞
	F	0	−2	−3	0	0	0	0	
				↑					

В соответствии с п. III алгоритма проверяем критерий оптимальности. В последней строке имеются отрицательные коэффициенты. Выбираем из них наибольший по модулю (−3); второй столбец разрешающий, переменная x_2 перейдет в основные (этот столбец отмечен стрелкой). В соответствии с п. IV находим оценочные отношения и $x_2 = \min\{18/3;\ 16;\ 5;\ \infty\} = 5$. Третья строка является разрешающей (отмечена горизонтальной стрелкой). На пересечении разрешающих строки и столбца стоит разрешающий элемент $a_{33} = 1$.

Строим табл. 5.2 по правилам п. V алгоритма:

а) в новом базисе основные переменные: x_3, x_4, x_2, x_6;

б) расставляем нули и единицы; например, в клетке, соответствующей основной переменной x_3 по столбцу и строке, ставим 1, а в клетке, соответствующей основной переменной x_3 по строке, а основной переменной x_2 — по столбцу, ставим 0 и т.п. В последней строке против всех основных переменных ставим 0. Третья строка получается делением на разрешающий элемент $a_{33} = 1$. Остальные клетки заполняем по правилу прямоугольника. Например: $b_1' = 18 - \dfrac{3 \cdot 5}{1} = 3$, $a_{11}' = 1 - \dfrac{3 \cdot 0}{1} = 1$ и т.д.

Получим вторую симплексную таблицу (табл. 5.2)

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
→ x_3	3	1	0	1	0	−3	0	3 ←
x_4	11	2	0	0	1	−1	0	11/2
x_2	5	0	1	0	0	1	0	∝
x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
F	15	−2	0	0	0	3	0	
		↑						

Критерий оптимальности вновь не выполнен. Теперь первый столбец разрешающий; x_1 — переходит в основные, $\min\{3/1;\ 11/2;\ \infty;\ 7\} = 3$; первая строка разрешающая, a_{11} — разрешающий элемент.

Новая симплексная таблица примет вид табл. 5.3.

Таблица 5.3

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	3	1	0	1	0	−3	0	∝
→ x_4	5	0	0	−2	1	5	0	5/5 ←
x_2	5	0	1	0	0	1	0	5/1
x_6	12	0	0	−3	0	9	1	12/9
F	21	0	0	2	0	−3	0	
						↑		

И на этот раз критерий оптимальности не выполнен; пятый столбец и вторая строка разрешающие, $a_{25} = 5$ — разрешающий элемент.

Переходим к табл. 5.4

Таблица 5.4

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	6	1	0	−1/5	3/5	0	0	
x_5	1	0	0	−2/5	1/5	1	0	
x_2	4	0	1	2/5	−1/5	0	0	
x_6	3	0	0	3/5	−9/5	0	1	
F	24	0	0	4/5	3/5	0	0	

Критерий оптимальности выполнен, значит $F_{max} = 24$, оптимальное базисное решение (6; 4; 0; 0; 1; 3) совпадает с ранее полученным (*см.* решение задачи **5.1** симплексным методом).▶

Метод искусственного базиса.

Выше был изложен алгоритм получения допустимого базисного решения в случае, когда первоначальное базисное решение недопустимо. Однако при расчете с помощью симплексных таблиц удобнее пользоваться так называемым *М-методом, или методом искусственного базиса*. Он заключается в следующем.

В каждое уравнение, дающее отрицательную компоненту в базисном решении, вводим свою новую неотрицательную искусственную переменную $y_1, y_2, ..., y_k$, которая имеет тот же знак, что и свободный член в правой части уравнения. В первой таблице включаем в число основных все искусственные переменные и те обычные добавочные переменные, которые определяют неотрицательные компоненты базисного решения. Составляем новую линейную функцию $T = F - M(y_1 + y_2 + ... + y_k)$, где M — произвольно большое число, и ищем ее максимум (T-задача). Назовем *М-функцией* выражение $M(y_1 + y_2 + ... + y_k)$. Справедлива ***теорема*** (доказательство здесь не приводится):

1. *Если в оптимальном решении Т-задачи все искусственные переменные равны* 0, *то соответствующие значения остальных переменных дают оптимальное решение исходной задачи* (*т.е.* $T_{max} = F_{max}$, *если* $y_1 = y_2 = ... = y_k = 0$, *т.е. минимум М-функции равен* 0).

2. *Если имеется оптимальное решение Т-задачи, в котором хотя бы одна из искусственных переменных отлична от* 0, *то система ограничений исходной задачи несовместна.*

3. *Если* $T_{max} = \infty$, *то исходная задача также неразрешима, причем либо* $F_{max} = \infty$, *либо условия задачи противоречивы.*

Из теоремы следует, что вначале следует найти минимум M-функции. Если он равен 0 и все искусственные переменные обращаются в 0, то далее можно отбросить эти переменные и решать исходную задачу, исходя из полученного допустимого базисного решения. На практике находят не минимум M-функции, а максимум $(-M)$-функции.

▷ **5.11.** Решить задачу **5.3** M-методом, используя симплексные таблицы.

Р е ш е н и е . Введем необходимое число искусственных переменных и столько же дополнительных строк в симплексной таблице.

Имеем $F = x_1 + 2x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$X_1 = (0; 0; -1; 3; 5)$ — недопустимое базисное решение с одной отрицательной компонентой, поэтому в первое уравнение введем искусственную переменную y_1 с тем же знаком, что и свободный член:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - y_1 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$T = x_1 + 2x_2 - My_1 \to \max.$$

Составляем первую симплексную таблицу (табл. 5.5).

	Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
→	y_1	1	−1	1	−1	0	0	1	1 ←
	x_4	3	−1	1	0	1	0	0	3
	x_5	3	1	0	0	0	1	0	∞
	F	0	−1	−2	0	0	0	0	max
	M_Φ	M	M	$-M$	M	0	0	M	max
				↑					

Последняя строка — это $(-M)$-функция, т.е. $(-M_\Phi)y_1$. Заполняем ее, умножая строку y_1 на коэффициент $(-M)$. Проверяя выполнение критерия оптимальности при отыскании максимума $(-M)$-функции, определяем, что в последней строке имеется отрицательный элемент во втором столбце; значит он является разрешающим, переменная x_2 переходит в основные. Минимальное оценочное отношение в первой строке, она разрешающая. Переменная y_1 переходит в неосновные, обращается в 0 на следующем базисном решении и далее исключается из рассмотрения.

В соответствии с общим алгоритмом получаем табл. 5.6.

Таблица 5.6

Базис	Свободный член	Переменные					Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	−1	1	−1	0	0	
x_4	2	0	0	1	1	0	
x_5	3	1	0	0	0	1	
F	2	−3	0	−2	0	0	max
$-M_\Phi$	0	0	0	0	0	0	max

Последняя строка показывает, что критерий оптимальности выполнен; $\max(-M_\Phi) = 0$, значит $\min M_\Phi = 0$, далее эту строку можно не рассматривать. Получено допустимое базисное решение (0; 1; 0; 2; 3), начиная с которого решаем исходную задачу в соответствии с обычным алгоритмом. Читателям рекомендуется завершить ее самостоятельно, а также решить задачи **5.2**, **5.4**, **5.5**, **5.6** с помощью симплексных таблиц.▶

Замечание. При решении задачи на отыскание минимума линейной функции цели рекомендуется вместо $Z_{\min}$ находить $(-Z)_{\max}$.