Лекция №5

Тема. Двойственная задача

1. Двойственная задача, ее экономическая интерпретация и правила построения.

В гл. 1 рассмотрена задача об использовании ресурсов (экономико-математическая модель и содержательная интерпретация этой задачи I представлены в левой части табл. 6.1). В приведенной модели b_i ($i = 1, 2, ..., m$) обозначает запас ресурса S_i; a_{ij} — число единиц ресурса S_i, потребляемого при производстве единицы продукции P_j ($j = 1, 2, ..., n$); c_j — прибыль (выручка) от реализации единицы продукции P_j (или цена продукции P_j).

Предположим, что некоторая организация решила закупить ресурсы $S_1, S_2, ..., S_m$ предприятия и необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы $y_1, y_2, ..., y_m$.

Очевидно, что покупающая организация заинтересована в том, чтобы затраты на все ресурсы Z в количествах $b_1, b_2, ..., b_m$ по ценам соответственно $y_1, y_2, ..., y_m$ были минимальны, т.е

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ \dots \ + b_my_m \to \min .$$

С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие может получить при переработке ресурсов в готовую продукцию. На изготовление единицы продукции P_1 расходуется a_{11} единиц ресурса S_1, a_{21} единиц ресурса S_2, ..., a_{i1} единиц ресурса S_i, ..., a_{m1} единиц ресурса S_m по цене соответственно $y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_m$. Поэтому для удовлетворения требований продавца затраты на ресурсы, потребляемые при изготовлении единицы продукции P_1, должны быть не менее ее цены c_1, т.е.

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ \dots \ + a_{m1}y_m \geq c_1.$$

Аналогично можно составить ограничения в виде неравенств по каждому виду продукции P_1, P_2, ..., P_n. Экономико-математическая модель и содержательная интерпретация полученной таким образом двойственной задачи II приведены в правой части табл. 6.1.

Таблица 6.1

Задача I (исходная)	Задача II (двойственная)
$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$ **(6.1)**	$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$ **(6.4)**
при ограничениях: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$ **(6.2)**	при ограничениях: $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_1 \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_2 \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$ **(6.5)**
и условии неотрицательности $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0.$ **(6.3)**	и условии неотрицательности $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ \ldots,\ y_m \geq 0.$ **(6.6)**
Составить такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов	*Найти такой набор цен (оценок) ресурсов $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, при котором общие затраты на ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее прибыли (выручки) от реализации этой продукции*

Цены ресурсов y_1, y_2, ..., y_m в экономической литературе получили различные названия: *учетные, неявные, теневые*. Смысл этих названий состоит в том, что это *условные*, "ненастоящие" цены. В отличие от "внешних" цен c_1, c_2, ..., c_n на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов y_1, y_2, ..., y_m являются *внутренними*, ибо они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их чаще называют *оценками* ресурсов.

2. Взаимосвязь решений прямой и двойственной (обратной) задач.

Рассмотрим формально две задачи I и II линейного программирования, представленные в табл. 6.1, абстрагируясь от содержательной интерпретации параметров, входящих в их экономико-математические модели. Обе задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче ищут максимум линейной функции, в другой — минимум.

2. Коэффициенты при переменных в линейной функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.

3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче максимизации все неравенства вида "≤", а в задаче минимизации — все неравенства вида "≥".

4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными друг к другу:

$$\text{для задачи I } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{для задачи II } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5. *Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.*
6. *Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.*

Две задачи I и II линейного программирования, обладающие указанными свойствами, называются ***симметричными взаимно двойственными задачами.*** В дальнейшем для простоты будем называть их просто *двойственными задачами.*

Исходя из определения, можно предложить следующий *алгоритм составления двойственной задачи.*

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу: если в исходной задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду "≤", а если минимум — к виду "≥". Для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, умножить на −1.
2. Составить расширенную матрицу системы A_1, в которую включить матрицу коэффициентов при переменных A, столбец свободных членов системы ограничений и строку коэффициентов при переменных в линейной функции.
3. Найти матрицу A_1', транспонированную к матрице A_1.
4. Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы A_1' и условия неотрицательности переменных.

6.1. Составить задачу, двойственную следующей задаче:

$$F = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решение. 1. Так как исходная задача на максимизацию, то приведем все неравенства системы ограничений к виду "≤", для чего обе части первого и четвертого неравенства умножим на −1. Получим

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 - x_2 \leq -5, \end{cases}$$

2. Составим расширенную матрицу системы

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & F \end{pmatrix}.$$

3. Найдем матрицу A_1', транспонированную к A

$$A_1' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & Z \end{pmatrix}$$

4. Сформулируем двойственную задачу:

$$Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ \ldots,\ y_4 \geq 0. \end{cases} \blacktriangleright$$