Лекция № 6

ТЕМА. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ, ИХ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

1. Первая теорема двойственности

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности. Вначале рассмотрим вспомогательное утверждение.

Основное неравенство теории двойственности. Пусть имеется пара двойственных задач I и II. Покажем, что *для любых допустимых решений* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ *исходной и двойственной задач справедливо неравенство*

$$F(X) \le Z(Y) \text{ или } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (6.7)$$

□ Умножив неравенства системы ограничений (6.2) исходной задачи $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$ соответственно на переменные $y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_m$ и сложив правые и левые части полученных неравенств, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (6.8)$$

Аналогично преобразовав систему ограничений (6.5) двойственной задачи $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ путем умножения обеих частей ее неравенства на переменные $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n$ и последующего их сложения, получим

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \qquad (6.9)$$

Так как левые части неравенств (6.8) и (6.9) представляют одно и то же выражение $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i$, то в силу свойства транзитивности неравенств получим доказываемое неравенство (6.7).■

Теперь можно перейти к признакам оптимальности решений.

Достаточный признак оптимальности. Сформулируем теорему.

Теорема. *Если* $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *и* $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ *— допустимые решения взаимно двойственных задач, для которых выполняется равенство*

$$F(X^*) = Z(Y^*), \qquad \textbf{(6.10)}$$

то X^* *— оптимальное решение исходной задачи I, а* Y^* *— двойственной задачи II.*

□ Пусть X_1 — любое допустимое решение исходной задачи I. Тогда на основании основного неравенства (6.7) получим $F(X_1) \le Z(Y^*)$. Однако X_1 — произвольное решение задачи I, отсюда в силу равенства (6.10) следует, что $F(X_1) \le F(X^*)$, т.е. X^* — оптимальное решение задачи I. Аналогично доказывается, что решение оптимально для задачи II. ■

Кроме достаточного признака оптимальности взаимно двойственных задач существуют и другие важные соотношения между их решениями. Прежде всего возникают вопросы: всегда ли для каждой пары двойственных задач есть одновременно оптимальные решения; возможна ли ситуация, когда одна из двойственных задач имеет решение, а другая нет. Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Первая (основная) теорема двойственности. *Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны:*

$$F_{\max} = Z_{\min} \text{ или } F(X^*) = Z(Y^*). \qquad \textbf{(6.11)}$$

Если линейная функция одной из задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

Из первой части утверждения теоремы (которую мы принимаем без доказательства) следует, что равенство (6.10) является не только достаточным признаком оптимальности решений (доказанным выше), но и необходимым признаком оптимальности решений взаимно двойственных задач.

□ Утверждение второй части легко доказывается методом от противного. Предположим, что в исходной задаче линейная функция не ограничена, т.е. $F_{\max} = \infty$, а условия двойственной задачи не являются противоречивыми, т.е. существует хотя бы одно допустимое решение $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$. Тогда в силу основного неравенства теории двойственности (6.7) $F(X) \le Z(Y)$, что противоречит условию неограниченности $F(X)$. Следовательно, при $F_{\max} = \infty$ в исходной задаче допустимых решений в двойственной задаче быть не может. ■

Рассмотрим примеры, подтверждающие справедливость первой теоремы двойственности.

▷ **6.2.** Даны две взаимно двойственные задачи:

I. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

II. $Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3, \end{cases}$$

$y_i \ge 0\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$

Задача I об использовании ресурсов (*см.* разд. 1.2) и двойственная ей задача II были решены ранее (*см.* разд. 5.2, 5.3) и получены оптимумы линейных функций $F_{\max} = 24$ для задачи I, и $Z_{\min} = 24$ для задачи II, т.е заключение первой части основной теоремы двойственности (6.11) верно.▶

Экономический смысл первой (основной) теоремы двойственности. *План производства* $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *и набор цен (оценок) ресурсов* $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ *оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль (выручка) от продукции, найденная при "внешних" (известных заранее) ценах* $c_1, c_2, ..., c_n$, *равна затратам на ресурсы по "внутренним" (определяемым только из решения задачи) ценам* $y_1, y_2, ..., y_m$. Для всех же других планов X и Y обеих задач в соответствии с основным неравенством (6.7) теории двойственности прибыль (выручка) от продукции всегда меньше (или равна) затрат на ресурсы.

Так, в задаче **6.2** оптимумы прибыли от продукции $F_{\max}$ и затрат на ресурсы $Z_{\min}$ равны 24 руб.[1], для всех остальных планов $F(X) \le 24,\ Z(Y) \ge 24.$

Экономический смысл первой теоремы двойственности можно интерпретировать и так: предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ и получить максимальную прибыль (выручку) $F_{\max}$ либо продавать ресурсы по оптимальным ценам $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ и возместить от продажи равные ей минимальные затраты на ресурсы $Z_{\min}$.

▷ **6.3.** Даны две взаимно двойственные задачи:

I. $Z = -8y_1 + 2y_2 \to \min$
при ограничениях:
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ -2y_1 + y_2 \geq -1, \end{cases}$$
$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$

II. $F = x_1 - x_2 \to \max$
при ограничениях:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \end{cases}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться (симплексным методом или геометрически) в том, что в исходной задаче I линейная функция не ограничена ($Z_{\min} = -\infty$), а в двойственной задаче условия противоречивы, т.е. заключение второй части основной теоремы двойственности выполняется.▶

Вторая теорема двойственности

Тесная связь между двумя взаимно двойственными задачами проявляется не только в равенстве оптимальных значений их линейных функций, о чем утверждалось в первой (основной) теореме двойственности.

Пусть даны две взаимно двойственные задачи I — (6.1)—(6.3) и задачи II — (6.4)—(6.6). Если каждую из этих задач решать симплексным методом, то необходимо привести их к каноническому виду, для чего в систему ограничений (6.2) задачи I (в краткой записи $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$) следует ввести m неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$, а в систему огра-

ничений (6.5) задачи II ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$) — n неотрицательных переменных $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+j}, \ldots, y_{n+m}$, где $i(j)$ — номер неравенства, в которое введена дополнительная переменная $x_{n+i} \geq 0$ ($y_{m+j} \geq 0$).

Системы ограничений каждой из взаимно двойственных задач примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m. \tag{6.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{6.13}$$

Установим соответствие между первоначальными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Переменные исходной задачи I											
Первоначальные						Дополнительные					
x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+i}	...	x_{n+m}
↕	↕		↕		↕	↕	↕		↕		↕ (6.14)
y_{m+1}	y_{m+2}	...	y_{m+j}	...	y_{m+n}	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m
Дополнительные						Первоначальные					
Переменные двойственной задачи II											

Теорема. *Положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, т.е. для любых $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$: если $x_j^* > 0$, то $y_{m+j}^* = 0$; если $x_{n+i}^* > 0$, то $y_i^* = 0$, и аналогично, если $y_i^* > 0$, то $x_{n+i}^* = 0$; если $y_{m+j}^* > 0$, то $x_j^* = 0$.*

Из доказанной теоремы следует важный вывод о том, что введенное ранее *соответствие (6.14) между переменными взаимно двойственных задач при достижении оптимума (т.е. на последнем шаге решения каждой задачи симплексным методом) представляет соответствие между* ***основными*** *(как правило, не равными нулю) переменными одной из двойственных задач и* ***неосновными*** *(равными нулю) переменными другой задачи, когда они образуют допустимые базисные решения.*

Рассмотренная теорема является следствием следующей теоремы.

Вторая теорема двойственности[1]. *Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.*

Метод, при котором вначале симплексным методом решается двойственная задача, а затем оптимум и оптимальное решение исходной задачи находятся с помощью теорем двойственности, называется ***двойственным симплексным методом.*** Этот метод бывает выгодно применять, когда первое базисное решение исходной задачи недопустимое или, например, когда число ее ограничений m больше числа переменных n.