

Введение в математический анализ

Числовые множества. Действительные числа. Окрестность точки.

Функция. Способы задания функций. Основные элементарные функции.

Понятие множества является одним из основных математических понятий. *Множество* есть определенная совокупность каких-либо объектов, называемых *элементами* множества. Множество может содержать конечное или бесконечное количество элементов. В первом случае множество называется *конечным*, во втором – *бесконечным*. К числу множеств относят и множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называется *пустым* и обозначается $\emptyset$.

Пусть X и Y – два множества. Если X и Y состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они *совпадают* (равны), и пишут $X = Y$. Если все элементы множества X принадлежат множеству Y , то говорят, что X *содержится* в Y , это записывается так: $X \subset Y$. В этом случае множество X называется *подмножеством* Y . *Объединением* множеств X и Y называется множество $X \cup Y$ всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X или Y . *Пересечением* множеств X и Y называется множество $X \cap Y$ состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств X и Y .

При изложении некоторых разделов курса будем пользоваться символами $\forall$ и $\exists$, называемыми соответственно *кванторами общности и существования*: $\forall$ – «для всех», «для каждого»; $\exists$ – «найдется», «существует», «можно указать». Символ $\Rightarrow$ означает *логическое следствие*. Знак $\Leftrightarrow$ означает *логическую равносильность*.

Множество действительных чисел состоит из всех рациональных и всех иррациональных чисел. *Рациональным* числом называется число вида $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа, причем $n \neq 0$. *Иррациональным* числом называется действительное число, которое нельзя представить в виде отношения двух целых чисел. Всякое рациональное число либо является целым, либо представляется конечной или периодической бесконечной десятичной дробью. Иррациональное число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью.

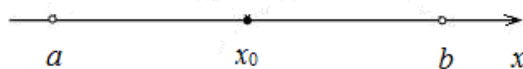
Действительные числа можно изображать точками числовой оси. *Числовой осью* называется прямая, на которой выбраны *начальная точка* (начало) и *положительное направление* (отмеченное на чертеже стрелкой) и отрезок, длина которого считается равной единице (*единица масштаба*). Если действительное число $x > 0$, то оно изображается точкой числовой оси, находящейся от начала на расстоянии x в положительном направлении; если $x < 0$, то точка оси, изображающая x , лежит в отрицательном направлении от начала на расстоянии $-x$; число нуль изображается начальной точкой оси.

Абсолютной величиной (модулем) $|x|$ действительного числа x называется само это число, если $x \geq 0$, или число $-x$, если $x < 0$. Абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел: $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. Абсолютная величина разности двух действительных чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел: $|x_1 - x_2| \geq |x_1| - |x_2|$.

Интервалом называется множество действительных чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, где a и b – границы интервала. *Сегментом (отрезком)* называется множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$. Интервал обозначается

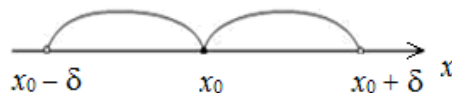
символом $(a; b) =]a, b[$, а сегмент – символом $[a, b]$.

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий точку x_0 :



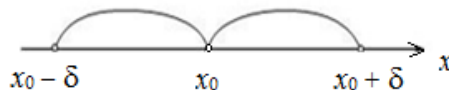
$$x \in (a; b) =]a, b[.$$

δ -окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, длина которого 2δ , симметричный относительно x_0 :



$$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow |x - x_0| < \delta.$$

Проколотой δ -окрестностью точки x_0 называется δ -окрестность точки x_0 без самой точки x_0 :



$$x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Функция. Способы задания функций. Основные элементарные функции

Пусть даны два множества X и Y . Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f соответствует единственный элемент y из множества Y , то говорят, что на множестве X определена *функция* $y = f(x)$ с *областью определения* $X = D(f)$ и *областью изменения* $Y = E(f)$. При этом x считают *независимой переменной*, или *аргументом* функции, а y – *зависимой переменной* или *функцией*.

Элементы множеств X и Y могут быть не только числами, но и другими, вообще говоря, произвольными объектами. Однако в дальнейшем предполагается, что элементы множеств X и Y являются числами.

Частным значением функции $y = f(x)$ при фиксированном значении аргумента $x = x_0$ называют $y_0 = f(x_0)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называют множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy , для каждой из которых абсцисса x является значением аргумента, а ордината y – соответствующим значением данной функции, т.е. геометрическое место точек $M(x; f(x))$ на плоскости Oxy , где $x \in D(f)$ и $f(x) \in E(f)$.

Задать функцию f – значит указать, как по каждому значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции $f(x)$. Существуют три основных способа задания функций: *аналитический*, *табличный* и *графический*.

Аналитический способ – способ задания функции с помощью формулы, указывающей, какие действия надо совершить над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции.

Различают несколько способов аналитического задания функции:

- а) Функция задана *явно* формулой $y = f(x)$.
- б) Функция задана *неявно* уравнением, связывающем x и y : $F(x, y) = 0$.
- в) Функция задана *параметрически* с помощью некоторого параметра t , причём и аргумент x , и функция y зависят от этого параметра: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

При *табличном способе* задания функции составляется таблица, в которой указывается ряд значений аргумента и соответствующих значений функции.

Графический способ задания функции, когда зависимость функции от её аргумента задаётся графически.

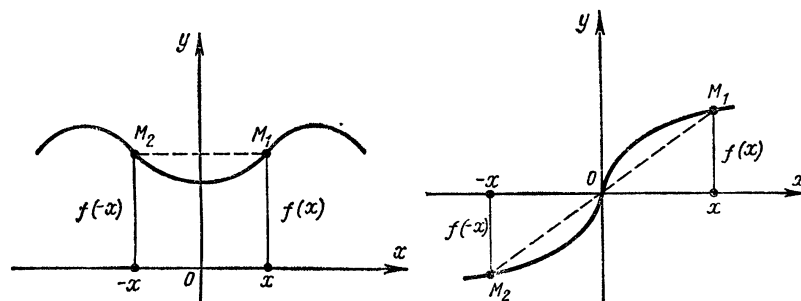
Целой рациональной функцией или *многочленом* называется функция вида

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = P_n(x),$$

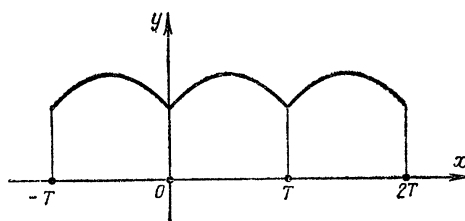
где n – натуральное число, называемое *степенью* многочлена $P_n(x)$, a_k , $k = 0, \dots, n$ – действительные числа, называемые *коэффициентами* многочлена $P_n(x)$. Постоянную $y = C$ можно рассматривать как многочлен нулевой степени: $y = C \equiv Cx^0$.

Дробно-рациональной функцией или *рациональной дробью* называется отношение двух многочленов: $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, при условии $Q_m(x) \neq 0$.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для любого x , принадлежащего области определения этой функции. График четной функции расположен симметрично относительно оси Oy . Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любого x , принадлежащего области определения этой функции. График нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат.



Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что $f(x \pm T) = f(x)$ в области определения функции, при этом наименьшее из положительных чисел T , удовлетворяющих этому условию, называется *периодом* функции $f(x)$. При исследовании периодической функции с периодом T и построении ее графика достаточно знать значения этой функции на каком-либо сегменте длины T . Любое из остальных значений можно получить, пользуясь свойством периодичности этой функции.



Пусть функция $y = f(z)$ определена на множестве $D(f)$, а функция $z = g(x)$ определена на $D(g)$, причём $E(g) \subset D(f)$. Тогда функция $y = F(x) = f(g(x))$ называется

сложной функцией (или функцией от функции, или суперпозицией функций f и g).

Пусть задана функция $y = f(x)$ взаимно однозначно отображающая множество $X = D(f)$ на множество $Y = E(f)$, тогда функция $x = g(y)$ называется *обратной* к функции $y = f(x)$, т.е. любому $y \in E(f)$ соответствует единственное значение $x \in D(f)$, при котором верно равенство $y = f(x)$. Графики функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$ представляют одну и ту же кривую. Если же у обратной функции независимую переменную обозначить x , а зависимую y , то графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ будут симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Элементарной функцией называется функция, составленная из основных элементарных функций с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции.

Основные элементарные функции:

$y = C$, $C = \text{const}$ (постоянная функция), $D(y) = R^1 =]-\infty, +\infty[$; $E(y) = C$.

$y = kx + b$ (линейная функция), $D(y) = R^1$; $E(y) = R^1$.

$y = x^\alpha$ (степенная функция), $\alpha \in R^1$, $E(y)$, $D(y)$ зависят от α .

$y = a^x$ (показательная функция), $a > 0$, $a \neq 1$, $D(y) = R^1$, $E(y) = (0, +\infty)$.

$y = \log_a x$ (логарифмическая функция), $a > 0$, $a \neq 1$, $D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = R^1$.

Тригонометрические функции:

$y = \sin x$, $D(y) = R^1$, $E(y) = [-1; +1]$. $y = \cos x$, $D(y) = R^1$, $E(y) = [-1; +1]$.

$y = \operatorname{tg} x$, $D(y) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $E(y) = R^1$. $y = \operatorname{ctg} x$, $D(y) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\pi n, \pi + \pi n)$, $E(y) = R^1$.

Обратные тригонометрические функции:

$y = \arcsin x$, $D(y) = [-1; +1]$, $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. $y = \arccos x$, $D(y) = [-1; +1]$, $E(y) = [0; \pi]$.

$y = \operatorname{arctg} x$, $D(y) = R^1$, $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $y = \operatorname{arcctg} x$, $D(y) = R^1$, $E(y) = (0; \pi)$.

