Лекция 2. ***Числовые последовательности. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над пределами.***

Понятие предела – фундаментальное понятие математического анализа. С помощью предельного перехода определяются длина окружности, объем цилиндра, конуса и т. д.

Определение. Если каждому натуральному числу $\{n\}$: 1, 2, 3, …, n, … поставлено в соответствие действительное число x_n, то множество чисел $\{x_n\}$: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называется *числовой последовательностью*.

Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называются (наз-ся) *элементами* (эл-тами) последовательности, символ x_n – *общим* эл-том, а число n его *номером*.

Последовательность (посл-ть) задана если указан способ получения любого ее элемента.

Геометрически посл-ть изображается на координатной прямой в виде посл-ти точек, координаты которых равны соответствующим элементам посл-ти.

Арифметические действия над числовыми посл-тями.

Пусть даны две посл-ти $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

1) *произведение* посл-ти $\{x_n\}$ на число m определяет посл-ть

$$m\{x_n\} = \{mx_n\}: mx_1, mx_2, mx_3, \ldots, mx_n, \ldots;$$

2) *суммой* данных посл-тей называется посл-ть

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}: x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n, \ldots;$$

3) *разностью* – посл-ть

$$\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}: x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \ldots, x_n - y_n, \ldots;$$

4) *произведением* – посл-ть

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}: x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \ldots, x_ny_n, \ldots;$$

5) *частным* – посл-ть

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}: \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots, \text{если } y_n \neq 0.$$

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *ограниченной сверху*, если существует (сущ-т) число M такое, что любой элемент x_n этой посл-ти удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$; в символической записи $\exists M \forall x_n: x_n \leq M$.

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *ограниченной снизу*, если сущ-т число m такое, что любой элемент x_n этой посл-ти удовлетворяет неравенству $x_n \geq m$, т. е. $\exists m \forall x_n: x_n \geq m$.

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. $m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq N$, где $N = \max\{|m|, |M|\}$, т. е. $\exists N \forall x_n: |x_n| \leq N$.

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *неограниченной*, если для любого положительного числа A сущ-т элемент x_n этой посл-ти, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$ (т. е. либо $x_n > A$, либо $x_n < -A$). т. е. $\forall A \exists x_n: |x_n| > A$.

Из данных определений следует, что если посл-ть ограничена сверху, то все ее элементы принадлежат промежутку $]-\infty, M]$, если ограничена снизу — промежутку $[m, +\infty[$, если ограничена и сверху и снизу — промежутку $[m, M]$.

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *бесконечно большой* (б. б.), если для любого положительного числа A сущ-т номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > A$, т. е. $\forall A \exists N \forall n > N: |x_n| > A$. (Отметим, что любая б. б. посл-ть является неограниченной, однако

неограниченная посл-ть может и не быть б. б.)

Посл-ть $\{\alpha_n\}$ наз-ся *бесконечно малой* (б. м.), если для любого положительного числа ε сущ-т номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N: |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Если $\{x_n\}$ б. б. посл-ть и все ее элементы отличны от нуля, то посл-ть $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – б. м. и, обратно, если $\{\alpha_n\}$ – б. м. посл-ть и $\alpha_n \neq 0$, то посл-ть $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – б. б.*

Основные свойства б. м. последовательностей

Теорема 2. *Сумма и разность двух б. м. посл-тей есть б. м. посл-ти.*

Теорема 3. *Произведение двух б. м. посл-тей есть б. м. посл-ть.*

(Отметим, что частное двух б. м. посл-тей может не быть б. м. посл-тью и даже может не иметь смысла.)

Теорема 4. *Произведение ограниченной посл-ти на б. м. посл-ть есть б. м. посл-ть.*

Следствие 1. *Произведение б. м. посл-ти на число есть б. м. посл-ть.*

Предел последовательности

Определение. Число a наз-ся *пределом* посл-ти $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon, \tag{1}$$

т. е. $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon.$$

Посл-ть, имеющая предел, наз-ся *сходящейся* (сх-ся). Если посл-ть $\{x_n\}$ сх-ся и имеет своим пределом число a, то символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{2}$$

Посл-ть, не являющаяся сх-ся наз-ся *расходящейся*.

Замечание 1. *Если посл-ть $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a, тогда $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ является б. м. посл-тью.*

Замечание 2. *Неравенство* (1) *равносильно неравенствам*

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \ \text{ или } \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

которые означают, что элемент $\{x_n\}$, $\forall n > N$, находится в ε-окрестности точки a.

Основные свойства сх-ся последовательностей

Лемма 1. *Если все элементы б. м. посл-ти $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу c, то $c = 0$.*

Теорема 5. *Сх-ся посл-ть имеет только один предел.*

Теорема 6. *Сх-ся посл-ть ограничена.*

Замечание 3. *Ограниченная посл-ть может и не быть сходящейся.*

Теорема 7. *Сумма (разность) двух сх-ся посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сх-ся посл-ть, предел которой равен сумме (разности) пределов посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{3}$$

Теорема 8. *Произведение двух сх-ся посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сх-ся посл-ть, предел которой равен произведению пределов посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{4}$$

Теорема 9. *Частное двух сх-ся посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел $\{y_n\}$*

отличен от нуля есть сх-ся посл-ть, предел которой равен частному пределов посл-тей $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$*:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}. \quad (5)$$

Предельный переход в неравенствах

Теорема 10. *Если эл-ты сх-ся посл-ти* $\{x_n\}$*, начиная с некоторого номера, удовлетворяют (удов-т) неравенству (нер-ву)* $x_n \geq b$*, то и предел* a *этой пос-ти удов-т нер-ву* $a \geq b$*.* (Если эл-ты сх-ся посл-ти $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удов-т нер-ву $x_n \leq b$, то и предел а этой пос-ти удов-т нер-ву $a \leq b$.)

Следствие 2. Если эл-ты сх-ся посл-тей $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$*, начиная с некоторого номера, удов-т нер-ву* $x_n \leq y_n$*, то их пределы удов-т нер-ву* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Следствие 3. Если эл-ты сх-ся посл-тей $\{x_n\}$ *находятся на отрезке* $[a,b]$*, то и её предел* $c=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ *также находится на этом отрезке* $a \leq c \leq b$.

Теорема 11. *Пусть даны три посл-ти* $\{x_n\}$*,* $\{y_n\}$ *и* $\{z_n\}$*, причем* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *для всех* n*, и пусть посл-ти* $\{x_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *имеют один и тот же предел* $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$*. Тогда посл-ть* $\{y_n\}$ *также имеет предел* $a=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Монотонные последовательности

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$ для всех n; *неубывающей*, если $x_n \leq x_{n+1}$ для всех n; *убывающей*, если $x_n > x_{n+1}$ для всех n; *невозрастающей*, если $x_n \geq x_{n+1}$ для всех n.

Все такие посл-ти объединяются общим названием *монотонные посл-ти*. Возрастающие и убывающие посл-ти наз-ся также *строго монотонными*.

Отметим, монотонные посл-ти ограничены, по крайней мере, с одной стороны: неубывающие посл-ти – снизу ($x_n \geq x_1$ для всех n), невозрастающие – сверху ($x_n \leq x_1$ для всех n). Оказывается, что если монотонная посл-ть ограничена с обеих сторон, т. е. просто *ограничена*, то она сходится (имеет предел).

Теорема 12. *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Ограниченность монотонной посл-ти является необходимым и достаточным условием сходимости.

Теорема о вложенных отрезках

Пусть дана посл-ть отрезков $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, …, $[a_n,b_n]$, … таких, что каждый последующий содержится в предыдущем: $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset \cdots$, т. е.

$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ для всех n, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

Такую посл-ть наз-ют *посл-тью вложенных отрезков*.

Теорема 12. Для любой посл-ти *вложенных отрезков существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.*

Замечание 4. Теорема неверна, если вместо отрезков рассматривать интервалы. Например, для посл-ти вложенных интервалов $]0,1[\supset \left]0,\frac{1}{2}\right[\supset \left]0,\frac{1}{3}\right[\supset \cdots \supset \left]0,\frac{1}{n}\right[\supset \cdots$ не существует точки, принадлежащей всем интервалам.