Лекция № 3. Предел функции

1. Понятие предела функции. Важную роль в курсе математического анализа играет понятие предела, связанное с поведением функции в окрестности данной точки. Напомним, что δ-окрестностью точки a называется интервал длины 2δ с центром в точке a, т. е. множество

$$U_\delta(a) = \{x: |x-a| < \delta\} = \{x:\ a-\delta < x < a+\delta\}$$

Если из этого интервала удалить точку a, то получим множество, которое называют проколотой δ *-окрестностью точки* a и обозначают $\dot{U}_\delta(a)$, т.е.

$$\dot{U}_\delta(a) = \{x: |x-a| < \delta, x \neq a\} = \{x:\ 0 < |x-a| < \delta\}.$$

2. **Два определения предела функции и их эквивалентность.**

а) Определение предела по Коши.

Число A *называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* a*, если эта функция определена в некоторой окрестности точки* a*, за исключением, быть может, самой точки* a*, и для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $\delta > 0$ *такое, что для всех* x*, удовлетворяющих условию* $|x-a| < \delta, x \neq a$*, выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

С помощью логических символов это определение можно записать так:

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x) = A\right\} \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta > 0: \forall x: 0 < |x-a| < \delta \to\ |f(x) - A| < \varepsilon,$$

или, используя понятие окрестности, в виде

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x) = A\right\} \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to\ f(x) \in \dot{U}_\varepsilon(A).$$

Таким образом, число A есть предел функции $f(x)$ в точке a, если для любой ε-окрестности числа A можно найти такую проколотую δ -окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих этой δ-окрестности, соответствующие значения функции содержатся в ε-окрестности числа A.

Геометрический смысл предела функции: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0,что для всех $x \neq x_0$из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$. Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Замечание 1. В определении предела функции в точке a предполагается, что $x \neq a$. Это требование связано с тем , что точка a может не принадлежать области определения функции. Отсутствие этого требования сделало бы

невозможным использование предела для определения производной, так как производная функции $f(x)$ в точке a — это предел функции

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

которая не определена в точке a.

б) *Определение предела по Гейне.* Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a, т. е. $\exists \delta_0 > 0: \dot{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f)$), и для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$ для всех $n \in N$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Теорема 1*. Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

3. Различные типы пределов.

а) Односторонние конечные пределы. Число A_1 называется *пределом слева функции* $f(x)$ в точке a и обозначают $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0: \forall x \in (a - \delta, a) \rightarrow \ |f(x) - A_1| < \varepsilon.$$

Аналогично число A_2 называется *пределом справа функции* $f(x)$ в точке a и обозначают $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0: \forall x \in (a, a + \delta) \rightarrow \ |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Числа A_1, A_2 характеризуют поведение функции f соответственно в левой и правой полуокрестности точки a, поэтому пределы слева и справа называют односторонними пределами. Если $a = 0$, то предел слева функции $f(x)$ обозначают $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ или $f(-0)$, а предел справа обозначают $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ или $f(+0)$.

Например, для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$, где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x < 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1, & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 10.4, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = f(-0) = -1$, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = f(+0) = 1$.

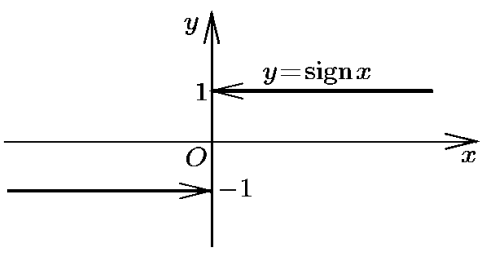


Рис. 10.4

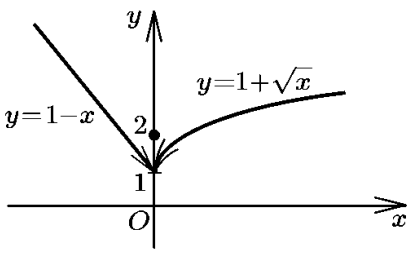


Рис. 10.5

б) Бесконечные пределы в конечной точке.

Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки a, имеет в этой точке *бесконечный предел,* и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\colon \forall x\in \dot{U}_\delta(a)\to\ f(x)>\varepsilon.$$

В этом случае функцию $f(x)$ называют бесконечно большой при $x\to a$.

Согласно условию (6) график функции $y=f(x)$ для всех $x\in\dot{U}_\delta(a)$ лежит вне горизонтальной полосы $|y|<\varepsilon$. Обозначим

$$U_\varepsilon(\infty)=\{y\colon\ |y|>\varepsilon\}=(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty)$$

и назовем это множество *ε-окрестностью бесконечности.* Тогда запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ означает, что для любой ε-окрестности бесконечности $U_\varepsilon(\infty)$ найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, что для всех $x\in\dot{U}_\delta(a)$ выполняется условие $f(x)\in U_\varepsilon(\infty)$.

Например, если $f(x)=1/x$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, так как условие (6) выполняется при $\delta=1/\varepsilon$ (рис. 10.6).

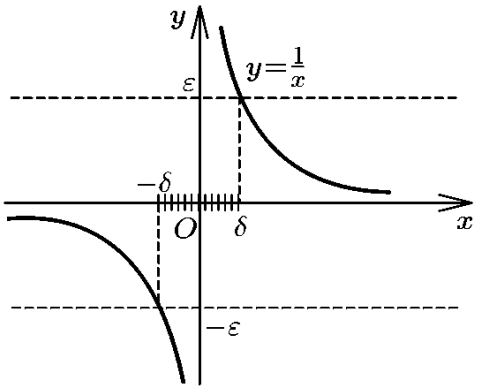


Рис. 10.6

Аналогично говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки a, имеет в этой точке *предел, равный* $+\infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\colon\ \forall x\in\dot{U}_\delta(a)\to f(x)>\varepsilon,$$

т. е. $f(x)\in U_\varepsilon(+\infty)$, где множество $U_\varepsilon(+\infty)$ называют *ε-окрестностью символа* $+\infty$.

Если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\colon\ \forall x\in\dot{U}_\delta(a)\to f(x)<-\varepsilon,$$

т. е. $f(x)\in U_\varepsilon(-\infty)$, где $U_\varepsilon(-\infty)=(-\infty,-\varepsilon)$, то говорят, что функция f имеет в точке a *предел, равный* $-\infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, а множество $U_\varepsilon(-\infty)$ называют *ε-окрестностью символа* $-\infty$.

Например, если $f(x)=\lg x^2$ (рис. 10.7), то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, а если $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ (рис. 10.8), то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

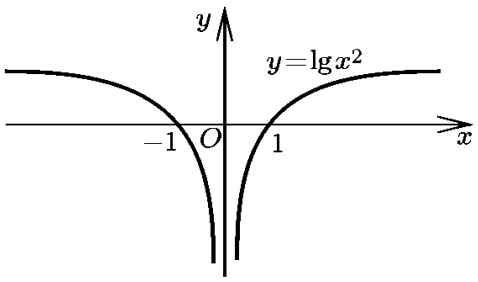


Рис. 10.7

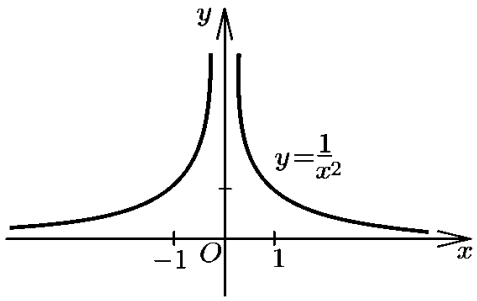


Рис. 10.8

в) *Предел в бесконечности.* Если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \ \forall x \in U_\delta(+\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то говорят, что число A есть *предел функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к плюс бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

4. Свойства пределов функций. В рассматриваемых ниже свойствах речь идет о конечном пределе функции в заданной точке. Под точкой понимается либо число a, либо один из символов $a - 0$, $a + 0$, $-\infty$, $+\infty$, ∞. Предполагается, что функция определена в некоторой окрестности или полуокрестности точки a, не содержащей саму точку a. Для определенности будем формулировать свойства пределов, предполагая, что $a -$ число, а функция определена в проколотой окрестности точки a.

а) Локальные свойства функции, имеющей предел. Покажем, что функция, имеющая конечный предел в заданной точке, обладает некоторыми локальными свойствами, т. е. свойствами, которые справедливы в окрестности этой точки.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена.

Свойство 2. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, причем $A \neq 0$ то найдется такая проколотая окрестность точки a, в которой значения функции f имеют тот же знак, что и число A.

Свойство 2 называют свойством сохранения знака предела.

Свойство 3. Если $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, причем $B \neq 0$, то существует число $\delta > 0$ такое, что функция $\frac{1}{g(x)}$ ограничена на множестве $\dot{U}_\delta(a)$.

б) Свойства пределов, связанные с неравенствами.

Свойство 1. Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$выполняются неравенства

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

и если

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A,$$

то существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Свойство 2. Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$выполняются неравенства

$$f(x) \leq g(x),$$

и если

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B,$$

то существует$A \leq B$.

в) Бесконечно малые функции (б.м.ф). Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой* при $x\to a$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) сумма конечного числа бесконечно малых при $x\to a$ функций есть бесконечно малая функция при $x\to a$;

2) произведение бесконечно малой при $x\to a$ функции на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая при $x\to a$ функция.

г) Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x\to x_0$**,** если для любого числа $M>0$ существует число $\delta=\delta(M)>0$, что всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. Записывают $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ или $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Коротко:

$$\left(\forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x:|x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0\Rightarrow|f(x)|>M\right)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty.$$

Например, функция $y=\dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x\to 2$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to x_0$ и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$; если лишь отрицательные значения, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

Определение. Функция $y=f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется ***бесконечно большой при*** $x\to\infty$, если для любого числа $M>0$ найдется такое число $N=N(M)>0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>N$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. Коротко:

$$\left(\forall M>0\ \exists N>0\ \forall x:|x|>N\Rightarrow|f(x)|>M\right)\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

Например, $y=2^x$ есть б.б.ф. при $x\to\infty$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\lim\limits_{x\to a}g(x)=B,$ то:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B;$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=AB;$

Отметим частный случай этого утверждения

$$\lim_{x\to a}\big(Cf(x)\big)=C\lim_{x\to a}f(x),$$

т.е. постоянный множитель можно вынести за знак предела.

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}, \quad B\neq 0.$

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда теоремы о пределах неприменимы. Особенно часто это бывает при отыскании и предела отношения $\frac{u}{v}$, когда предел знаменателя равен нулю. При этом, если предел числителя не равен нулю, то отношение $\frac{v}{u}$ является величиной бесконечно малой, а отношение $\frac{u}{v}$ является величиной бесконечно большой и $\lim\limits_{x\to a}\frac{u}{v}=\infty$.

Если же и числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, то для отыскания предела необходимы дополнительные преобразования или специальные рассмотрения.

Точно так же дополнительного исследования требуют и случаи, когда функция не определена в предельной точке и когда аргумент x стремится к бесконечности.

В рациональной дроби

$$y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

разделим числитель и знаменатель на x^n:

$$y=\frac{a_0x^{m-n}+a_1x^{m-1-n}+\cdots+a_mx^{-n}}{b_0+b_1x^{-1}+\cdots+b_nx^{-n}}$$

при $x\to\infty$ знаменатель стремится к b_0, а числитель – к нулю, если $m<n$, к ∞, если $m>n$, и к a_0, если $m>n$. Ясно, что предел будет один и тот же при произвольном стремлении x к ∞.

Таким образом,

$\lim\limits_{x\to\infty}y=0$, если $m<n$, $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$, если $m>n$, $\lim\limits_{x\to\infty}y=\frac{a_0}{b_0}$, если $m=n$.

5. Пределы монотонных функций. Понятие монотонной функции было введено в § 9 (п. 7). Докажем теорему о существовании односторонних пределов у монотонной функции.

Теорема 2. *Если функция f определена и является монотонной на отрезке $[a,b]$, то в каждой точке $x_0\in(a,b)$ эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках a и b — соответственно правый и левый пределы.*