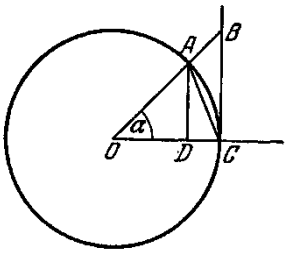
Лекция № 4. Замечательные пределы

Теорема. Функция $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$ имеет предел, равный 1:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Доказательство. Будем исходить из геометрического определения синуса. Возьмем окружность радиуса 1 и предположим, что угол α, выраженный в радианах, заключен в границах $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. (Так как $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ является четной функцией, то достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha>0$.) Из рис. видно, что площадь $\Delta OAC <$ площади сектора $OAC <$ площади ΔOBC.



Так как указанные площади соответственно равны $\frac{1}{2}\sin\alpha$, $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, то, следовательно,

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha.$$

Деля все члены неравенства на $\sin\alpha$, получим

$$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}$$

или

Из геометрического определения косинуса ясно, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1..$$

Отсюда на основании свойства 1 (лекция 6) заключаем, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Этот предел называют *первым замечательным пределом*.

С помощью найденного предела вычисляются многие другие пределы.

Примеры.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1;$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k;$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

Теорема. Функция

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

имеет предел при $n\to\infty$.

Доказательство. По формуле Ньютона имеем

$$y_n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n},$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}, \quad k = \overline{1,n}, \quad C_n^0 = 1.$$

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} +$$
$$+ \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

Запишем y_n в следующем виде:

$$y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

С увеличением n каждое слагаемое (кроме первых двух), стоящее на фиксированном k месте, увеличивается. Действительно,

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

становится больше с ростом n. Кроме того, при возрастании n добавляются новые положительные слагаемые. Следовательно, y_n – возрастающая функция n. Но она ограничена; в самом деле, заменив во всех членах правильные дроби, стоящие в скобках, единицами, получим

$$y_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Мы еще больше увеличим правую часть, если произведем такие замены:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2\cdot 3} \text{ на } \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2},$$
$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} \text{ на } \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot \dots \cdot n} \text{ на } \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

Следовательно,

$$y_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}};$$

тем более, дописав в правой части члены прогрессии $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots$ получим

$$y_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots\right).$$

Так как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, заключенной в скобках, равна 2, то

$$y_n < 3$$

Итак, данная возрастающая последовательность ограничена сверху, а значит, имеет предел, который, очевидно, заключен между 2 и 3.

Этот предел называется числом e.

Определение. Числом e называется предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Число e иррациональное и поэтому не может быть точно выражено какой-нибудь конечной дробью. Приближенно оно равно $e \approx 2{,}718$.

Число e играет очень важную роль в математическом анализе.

Оказывается, что функция

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

имеет предел не только тогда, когда ее аргумент принимает целочисленные значения $x = n$, но и при непрерывном его изменении и стремлении к $+\infty$ или к -∞; при этом пределом служит то же самое число e. Итак,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$