Лекция № 5. Непрерывность функции

1. Понятие непрерывности функции.

Определение. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a, называется непрерывной в точке a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \qquad (1)$$

Таким образом, функция f непрерывна в точке a, если выполнены следующие условия:

а) функция f определена в некоторой окрестности точки a, т. е. существует число δ_0 такое, $U_{\delta_0}(a) \subset D(f)$;

б) существует $\lim_{x\to a} f(x) = A$;

в) $A = f(a)$.

Определение непрерывности функции $f(x)$, в точке a, выраженное условием (1), можно сформулировать с помощью неравенств (на языке $\varepsilon - \delta$), с помощью окрестностей и в терминах последовательностей соответственно в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \colon \forall x \colon |x - a| < \delta \to \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \colon \forall x \in U_\delta(a) \to \ f(x) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big),$$

$$\forall\ \{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = a \ \ \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Подчеркнем, что в определении непрерывности, в отличие от определения предела, рассматривается полная, а не проколотая окрестность точки a, и пределом функции является значение этой функции в точке a. Назовем разность $x - a$ *приращением аргумента* и обозначим Δx, а разность $f(x) - f(a)$ – *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначим Δy. Таким образом,

$$\Delta x = x - a, \Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

При этих обозначениях равенство (1) примет вид

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

По аналогии с понятием предела слева (справа) вводится понятие непрерывности слева (справа). Если функция f определена на полуинтервале $(a - \delta, a]$ и $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$, т. е. $f(a - 0) = f(a)$, то эту функцию называют *непрерывной слева* в точке a.

Аналогично, если функция f определена на полуинтервале $[a, a + \delta)$ и $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, т. е. $f(a + 0) = f(a)$, непрерывной справа в точке a.

Очевидно, функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна как справа, так и слева в этой точке.

2. Точки разрыва. Будем предполагать, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Точку a назовем *точкой разрыва* функции f, если эта функция либо не определена в точке a, либо определена, но не является непрерывной в точке a. Следовательно, a – точка разрыва функции f, если не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

а) $a \in D(f)$;

б) существует конечный $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$;

в) $A = f(a)$.

Если a – точка разрыва функции f, причем в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, т. е.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) - 0, \text{ и } \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0),$$

то точку a называют *точкой разрыва первого рода*.

Замечание 1. Если $x = a$ точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то разность $f(a+0) - f(a-0)$ называют *скачком функции в точке* a. В случае когда $f(a+0) = f(a-0)$, точку a называют *точкой устранимого разрыва*. Полагая$f(a) = f(a+0) = f(a-0) = A$, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ A, & \text{если } x = a, \end{cases}$$

непрерывную в точке a и совпадающую с $f(x)$ при $x = a$. В этом случае говорят, что функция доопределена по непрерывности в точке a.

Пусть $x = a$ – точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода. Тогда ее называют точкой разрыва второго рода функции f . В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.

Теорема 1. *Если функция f определена на отрезке $[a, b]$ и монотонна, то она может иметь внутри этого отрезка точки разрыва только первого рода*.

3. Свойства функций, непрерывных в точке.

а) Локальные свойства непрерывной функции.

Свойство 1. Если функция f непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, т. е.

$$\exists\, \delta > 0 \;\; \exists\, C > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \to |f(x)| \leq C.$$

Свойство 2. Если функция f непрерывна в точке a, причем $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a знак функции совпадает со знаком числа $f(a)$, т. е.

$$\exists\, \delta > 0 \;\; : \forall x \in U_\delta(a) \to \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(a).$$

б) *Непрерывность суммы, произведения и частного*.

Если функции f и g непрерывны в точке a, то функции $f + g$, fg и f/g (при условии $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a.

в) *Непрерывность сложной функции*.

Теорема 2. *Если функция* $z = f(y)$ *непрерывна в точке* y_0, *а функция* $y = \varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *причем* $y_0 = \varphi(x_0)$, *то в некоторой окрестности точки* x_0 *определена сложная функция* $f(\varphi(x))$, *и эта функция непрерывна в точке* x_0.

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Функцию f называют непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и, кроме того, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

а) *Ограниченность непрерывной на отрезке функции.*

Теорема 3 (Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена, т. е.

$$\exists\, C > 0 : \ \forall x \in [a, b] \rightarrow \ |f(x)| \leq C.$$

б) *Достижимость точных граней*.

Теорема 4 (Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает своей точной верхней и нижней грани, т. е.

$$\exists \xi \in [a, b]: \ f(\xi) = \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

$$\exists \tilde{\xi} \in [a, b]: \ f(\tilde{\xi}) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

в) *Промежуточные значения*.

Теорема 5 (теорема Коши о нулях непрерывной функции). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает в его концах значения разных знаков, т. е, $f(a)f(b) < 0$, то на отрезке $[a, b]$ имеется хотя бы один нуль функции f , т. е.

$$\exists c \in [a, b]: \ f(c) = 0.$$

Замечание 2. Теорема 5 утверждает, что график функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ и принимающей в его концах значения разных знаков, пересекает ось *Ox* хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$.

Теорема б (теорема Коши о промежуточных значениях). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то для каждого значения C, заключенного между и $f(a)$ и и $f(b)$, найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = C$.

Теорема 7. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a, b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$определена функция $x = g(y)$, обратная к f , непрерывная и строго возрастающая.