Лекция№ 7. Производная и дифференциал

1. Задача, приводящая к понятию производной.

Задача о касательной. Пусть функция f определена в δ-окрестности точки x_0 и непрерывна при $x = x_0$. рассмотрим вопрос о касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Если Δx – приращение аргумента такое, что $0 < |\Delta x| < \delta$, то уравнение прямой l (рис. 1), проходящей через точки M_0 и $M(x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x))$, можно записать в виде

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0), \tag{1}$$

где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$.

Эту прямую называют *секущей*, а число $k = \operatorname{tg}\alpha$ – *угловым коэффициентом прямой* l; здесь $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – угол, образуемый прямой l и осью Ox (этот угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки).

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда $\Delta y \to 0$ в силу непрерывности функции f при $x = x_0$, и поэтому $MM_0 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Касательной к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, в точке M_0 естественно назвать предельной положение секущей l при $\Delta x \to 0$. Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_0, \tag{2}$$

то существует предельное положение секущей. Таким образом, если предел (2) существует, то прямая, проходящая через точку M_0 с угловым коэффициентом k_0, называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

2. Определение производной.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть существует конечный предел отношения $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Тогда этот предел называется ***производной функции в точке*** x_0 и обозначается $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$ или $y'(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Согласно определению производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Операция вычисления производной функции называется *дифференцированием*.

Для непосредственного нахождения y' от функции $y = f(x)$ служит следующее общее правило.

I. Придаем аргументу x приращение Δx и, подставляя в данное выражение вместо x наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

II. Вычитая из наращенного значения $f(x + \Delta x)$ функции ее первоначальное значение $f(x)$, находим приращение функции Δy

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

III. Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx, т.е. составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

IV. Вычисляем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Этот предел и даст искомую производную y' от функции $y = f(x)$.

Пример 1. Пользуясь определением производной функции, найти производную функции $y = \sqrt{x}$.

Решение.

I. $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$;

II. $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$;

III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$;

IV. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Теорема 1. *Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из равенства (3) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x),$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, откуда получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x). \qquad (4)$$

Если $\Delta x \to 0$, то правая часть равенства (4) стремится к нулю, и поэтому $\Delta y \to 0$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

3. Геометрический смысл производной. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то существует предельное положение секущей l (рис. 1), заданной уравнением (1). Это означает, что в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ существует касательная l_0 (рис. 1) к графику функции $y = f(x)$, причем, согласно формуле (2), $k_0 = f'(x_0)$, где k_0 – угловой коэффициент прямой l_0. Так как $k_0 = \operatorname{tg}\alpha_0$, где α_0 – угол, образуемый касательной с положительным направлением оси абсцисс, то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha_0$. Таким образом, геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, получаемое из уравнения (1) заменой $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ на $f'(x_0)$, имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пусть существует $f'(x_0)$. Проведем через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ прямую m_0, перпендикулярную касательной l_0 (рис. 2). Эту прямую называют *нормалью к графику функции* $y = f(x)$ в точке M_0. Если A, C, B – точки пересечения с осью Ox соответственно касательной l_0, нормали m_0 и прямой, проходящей через M_0 параллельно оси Oy, то отрезок AB называют подкасательной, а отрезок BC – поднормалью.

4. Односторонние и бесконечные производные.

По аналогии с односторонними пределами вводятся понятия левой и правой производных. Если функция $y = f(x)$ непрерывна слева в точке x_0 и существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то этот предел называют *левой производной функции* f *в точке* x_0 и обозначают $f'_-(x_0)$. Аналогично, если функция $y = f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, то предел $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ называют *правой производной функции* f *в точке* x_0 и обозначают $f'_+(x_0)$.

Прямые, проходящие через точку $M_0(x_0, f(x_0))$, с угловым коэффициентами $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ называют соответственно *левой и правой касательными к графику функции* $y = f(x)$ в точке M_0.

Из существования производной $f'(x_0)$ следует существование $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ и равенство

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0). \qquad (5)$$

В этом случае левая и правая касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 совпадают с касательной в точке M_0.

Обратно, если существуют левая и правая производные функции f в точке x_0 и выполняется условие $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$, то существует $f'(x_0)$ и справедливо равенство (5).

Пример 2. Найти левую и правую производные функции $f(x)=|x|$ в точке $x_0=0$.

Решение. Здесь $\Delta y=\Delta x$ и поэтому $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$, $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$. Прямые $y=-x$ и $y=x$ являются соответственно касательными к графику функции $y=|x|$ (рис. 3) в точке O.

Обратимся к понятию бесконечной производной. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и пусть

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta ч}=\infty.$$

Тогда прямую $x=x_0$ называют *касательной к графику функции* $y=f(x)$ в точке $M_0\big(x_0,\,f(x_0)\big)$. Эту прямую можно рассматривать как предельное положение (при $\Delta x\to 0$) секущей l, если уравнение (1) записать в виде

$$x-x_0=\frac{\Delta x}{\Delta y}\left(y-y_0\right)$$

и воспользоваться тем, что $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\to 0$ при $\Delta x\to 0$ в силу условия (5).

Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$, то говорят, что *функция* $y=f(x)$ *имеет в точке* x_0 *производную, равную* $+\infty$, и пишут $f'(x_0)=+\infty$. В этом случае односторонние пределы $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ называют соответственно *левой и правой производной* функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$. Таким образом, если $f'(x_0)=+\infty$, то $f'_-(x_0)=+\infty$ и $f'_+(x_0)=+\infty$.

Например, если $f(x)=\sqrt[3]{x}$, то $f'(0)=+\infty$, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=+\infty$. В точке $(0,0)$ касательной к графику функции $y=\sqrt[3]{x}$ является прямая $x=0$ (рис. 4).

Аналогично, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$, то говорят, что *функция* $y=f(x)$ *имеет в точке* x_0 *производную, равную* $-\infty$, и пишут $f'(x_0)=-\infty$.

В случае, когда $f'(x_0)=+\infty$ или $f'(x_0)=-\infty$, говорят, что *функция* $y=f(x)$ *имеет в точке* x_0 *бесконечную производную* (иногда добавляют: *определенного знака*).

Обратимся теперь к случаю, когда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, но не выполняется ни одно из условий $f'(x_0)=+\infty$, $f'(x_0)=-\infty$. В этом случае говорят, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не является бесконечностью определенного знака. Например, это имеет место, если $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$, а $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$. Этим свойством обладает функция $y=\sqrt{|x|}$ (рис. 5) в точке $x_0=0$, так как $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=+\infty$, а $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=-\infty$.

5. Дифференциал функции.

Определение 2. Если функция $y=f(x)$ определена в δ-окрестности точки x_0, а приращение Δy функции $y=f(x)$ в точке x_0 представимо в виде

$$\Delta y=A\Delta x+\Delta x\cdot\varepsilon(\Delta x), \tag{6}$$

где $A=A(x_0)$ не зависит от Δx, а $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то функция f называется ***дифференцируемой в точке*** x_0, а произведение $A\Delta x$ называется ее ***дифференциалом в точке*** x_0 и обозначается $df(x_0)$ или dy.

Таким образом,

$$\Delta y=dy+o(\Delta x) \text{ при } \Delta x\to 0\ , \tag{7}$$

где

$$dy=A\Delta x. \tag{8}$$

Отметим, что приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ можно рассматривать только для таких Δx, при которых $x_0+\Delta x$ принадлежит области определения функции f, в то время как дифференциал dy определен при любых Δx.

Теорема 2. *Для того чтобы функция* $y=f(x)$ *была дифференцируема в точке* x_0*, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела производную в точке* x_0*. При этом дифференциал и производная связаны равенством*

$$dy=f'(x_0)\,\Delta x. \tag{8}$$

Доказательство. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выполняется условие (6), и поэтому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ $(\Delta x\neq 0)$, откуда следует, что существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A$, т.е существует $f'(x_0)=A$.

Обратно, если существует $f'(x_0)$, то справедливо равенство (4), и поэтому выполняется условие (6). Это означает, что функция f дифференцируема в точке $x = x_0$, причем коэффициент A в формуле (6) и (7) равен $f'(x_0)$, и поэтому дифференциал записывается в виде (8).

Таким образом, существование производной функции в данной точке равносильно дифференцируемости функции в этой точке. Функцию, имеющую производную в каждой точке интервала (a, b), называют *дифференцируемой на интервале* (a, b).

Если функция дифференцируема на интервале (a, b) и, кроме того, существуют $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$. то функцию f называют *дифференцируемой на отрезке* $[a, b]$.

Замечание 3. Если $f'(x_0) \neq 0$, то из равенств (7) и (8) следует, что $dy \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y \sim dy$ при $\Delta x \to 0$. В этом случае говорят, что дифференциал есть *главная линейная часть приращения функции,* так как дифференциал есть линейная функция от Δx и отличается от Δy на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx.

Замечание 4. Приращение Δx часто обозначают символом dx и называют *дифференциалом независимого переменного.* Поэтому формулу (8) записывают в виде

$$dy = f'(x_0)\, dx. \tag{9}$$

По формуле (9) можно найти дифференциал функции, зная ее производную. Например, $d \sin x = \cos x dx$, $de^x = e^x dx$.

Из формулы (9) получаем $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$. Согласно этой формуле производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание 5. Отбрасывая в формуле (7) член $o(\Delta x)$, т.е. заменяя приращение функции ее дифференциалом, получаем приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x_0)\, \Delta x$ или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, \Delta x. \tag{10}$$

формулу (10) можно использовать для вычисления приближенного значения $f(x_0 + \Delta x)$ при малых Δx, если известны значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$.

Пример 3. Найти с помощью формулы (10) приближенное значение функции $y = \sqrt[4]{x}$ $x = 90$.

Решение. Полагая в формуле (10) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 81$, $\Delta x = 9$ и учитывая, что $f(x_0) = \sqrt[4]{81} = 3$, $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{4 \cdot 3^3}$, получаем $\sqrt[4]{90} \approx 3 + \dfrac{1}{12}$, т.е. $\sqrt[4]{90} \approx 3{,}083$.