Лекция № 8. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Локальный экстремум и теорема Ферма. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что функция $f(x)$ определена в δ-окрестности точки x_0, т.е. на множестве $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, и пусть для всех $x \in U_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0). \tag{1}$$

Тогда говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*.

Аналогично, если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0),$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*.

Локальный минимум и локальный максимум объединяются общим термином *локальный экстремум*. Функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 1, имеет локальные экстремумы в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, а именно минимум при $x = 1$ и $x = 4$ и максимум при $x = 3$.

Теорема 1(Ферма). *Если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то*

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0. Тогда в силу (1) для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) \geq 0. \tag{2}$$

Если $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то $x - x_0 < 0$ и из условия (2) следует, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \tag{3}$$

а если $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{4}$$

Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то существует предел при $x \to x_0$ в левой части неравенства (3), равный $f'_-(x_0) = f'(x_0)$. По свойствам пределов из (3) следует, что

$$f'(x_0) \le 0 \tag{5}$$

Аналогично, переходя к пределу в неравенстве (4), получаем

$$f'(x_0) \ge 0. \tag{6}$$

Из неравенств (5) и(6) следует, что $f'(x_0) = 0$.

Замечание 1. Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке локального экстремума $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси абсцисс (рис. 2).

2. Теорема Ролля о нулях производной.

Теорема 2 (Ролля). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *принимает в концах этого отрезка равные значения, т.е.*

$$f(a) = f(b), \tag{7}$$

и дифференцируема на интервале (a, b), *то существует точка* $\xi \in (a, b)$ *такая, что*

$$f'(\xi) = 0. \tag{8}$$

Теорему Ролля можно кратко сформулировать так: между двумя точками, в которых дифференцируемая функция принимает равные значения, найдется хотя бы один нуль производной этой функции. Для случая $f(a) = f(b) = 0$ теорема формулируется еще короче: между двумя нулями дифференцируемой функции лежит хотя бы один нуль ее производной.

Замечание 2. Геометрический смысл теоремы Ролля: при условиях теоремы 2 существует значение $\xi \in (a,b)$ такое, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна оси абсцисс (рис. 3).

Замечание 3. Все условия теоремы Роля существенны. На рис. 4, 5 и 6 изображены графики функций, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы Роля, кроме одного. Для всех этих функций не существует точки на интервале $(-2, 2)$, в которой производная была бы равна нулю.

3. Формула конечных приращений Лагранжа.

Теорема 3 (Лагранжа). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируема на интервале* (a, b), *то в этом интервале найдется хотя бы одна точка* ξ *такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{9}$$

4. Некоторые следствия из теоремы Лагранжа.

Следствие 1. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a,b) *и* $f'(x)=0$ *для всех* $x\in(a,b)$, *то* $f(x)=const$, $x\in(a,b)$.

Следствие 2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируема на интервале* (a,b) *и для всех* $x\in(a,b)$ *выполняется равенство* $f'(x)=k$, *где* k *– постоянная, то*

$$f(x)=kx+B,\ x\in[a,b],$$

т.е. f *– линейная функция.*

Следствие 3. *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a,b), *за исключением, быть может, точки* $x_0\in(a,b)$, *и непрерывна в точке* x_0. *Тогда если существует конечный или бесконечный*

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=A,$$

то в точке x_0 *существует левая производная*

$$f'_-(x_0)=A.$$

Аналогично, если существует

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=B,$$

то

$$f'_+(x_0)=B.$$

Следствие 4. *Если функции* φ *и* ψ *дифференцируемы при* $x\ge x_0$ *и удовлетворяют условиям* $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$, $\varphi'(x)>\psi'(x)$ *при* $x>x_0$, *то* $\varphi(x)>\psi(x)$ *при* $x>x_0$.

5. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши).

Теорема 4. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируемы на интервале* (a,b), *причем* $g'(x)\neq 0$ *во всех точках этого интервала, то найдется хотя бы одна точка* $\xi\in[a,b]$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Замечание 6. Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши $g(x)=x$.