Положив $e_1 = e_2 = 1$ и $\varepsilon = 1$, составить таблицу значений данной функции для $r = 1, 2, 3, \ldots, 10$ и построить ее график, соединив найденные точки «плавной» линией.

6. Записать функцию, выражающую зависимость радиуса r цилиндра от его высоты h при данном объеме $V = 1$. Вычислить значения r при следующих значениях h: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5. Построить график функции.

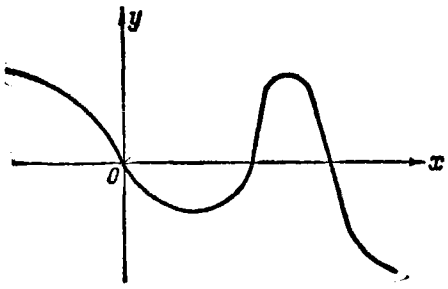


Рис. 1

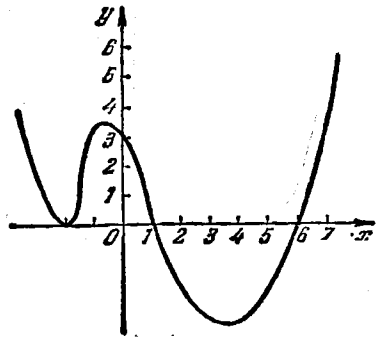


Рис. 2

7. Выразить площадь равнобочной трапеции с основаниями a и b как функцию угла α при основании a. Построить график функции при $a = 2$, $b = 1$.

8. Выразить зависимость длины b одного катета прямоугольного треугольника от длины a другого при постоянной гипотенузе $c = 5$. Построить график этой функции.

9. Даны функции

а) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; б) $\varphi(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$.

Найти: $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(\sqrt{2})$; $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$; $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-2)$; $\varphi(4)$. Существует ли $f(-1)$; $\varphi(-1)$?

10. Дана функция $f(u) = u^3 - 1$. Найти: $f(1)$; $f(a)$; $f(a+1)$; $f(a-1)$; $2f(2a)$.

11. Даны функции $F(z) = 2^{z-2}$ и $\varphi(z) = 2^{|z|-2}$. Найти: $F(0)$; $F(2)$; $F(3)$; $F(-1)$; $F(2{,}5)$; $F(-1{,}5)$ и $\varphi(0)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(x)$; $\varphi(-1) + F(1)$.

12. Дана функция $\psi(t) = ta^t$. Найти: $\psi(0)$; $\psi(1)$; $\psi(-1)$; $\psi\left(\frac{1}{a}\right)$; $\psi(a)$; $\psi(-a)$.

13. $\varphi(t) = t^3 + 1$. Найти: $\varphi(t^2)$ и $[\varphi(t)]^2$.

14. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$. Доказать, что $F(a) = F(-a)$.

15. $\Phi(z) = z^3 - 5z$. Доказать, что $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

16. $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$. Доказать, что $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

В аудитории
№№ 9 (а), 10, 12, 14, 19, 23, 30, 32, 35 (1,2),

Домашнее задание
№№ 9 (б), 11, 13, 15, 16, 18 22, 31, 35 (3,4)

17. $f(x)=\sin x-\cos x$. Доказать, что $f(1)>0$.

18. $\psi(x)=\lg x$. Доказать, что $\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$.

19. $F(z)=a^z$.

1) Доказать, что при любом z справедливо соотношение

$$F(-z)F(z)-1=0.$$

2) Доказать, что $F(x)F(y)=F(x+y)$.

20. Даны график функции $y=f(x)$ и значения a и b независимой переменной x (рис. 3). Построить на чертеже $f(a)$ и $f(b)$. Каков геометрический смысл отношения $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

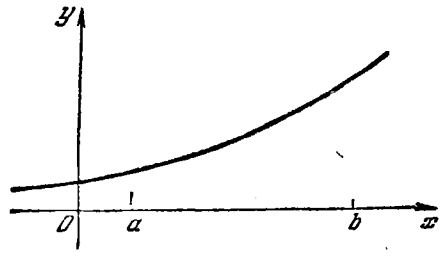


Рис. 3

21. Показать, что если любая хорда графика функции $y=f(x)$ лежит выше стягиваемой ею дуги, то для всех $x_1\neq x_2$ имеет место неравенство

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

22. Дано: $f(x)=x^2-2x+3$. Найти все корни уравнения: а) $f(x)=f(0)$; б) $f(x)=f(-1)$.

23. Дано: $f(x)=2x^3-5x^2-23x$. Найти все корни уравнения $f(x)=f(-2)$.

24. Дана функция $f(x)$. Указать хотя бы один корень уравнения $f(x)=f(a)$.

25. Указать два корня уравнения $f(x)=f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$, если известно, что функция $f(x)$ определена на отрезке $[-5, 5]$. Найти все корни данного уравнения для случая, когда $f(x)=x^2-12x+3$.

26. $F(x)=x^2+6$; $\varphi(x)=5x$. Найти все корни уравнения $F(x)=|\varphi(x)|$.

27. $f(x)=x+1$; $\varphi(x)=x-2$. Решить уравнение

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|.$$

28. Найти значения a и b в выражении функции $f(x)=ax^2+bx+5$, для которых справедливо тождество $f(x+1)-f(x)\equiv 8x+3$.

29. Пусть $f(x)=a\cos(bx+c)$. При каких значениях постоянных a, b и c выполняется тождество $f(x+1)-f(x)\equiv\sin x$.

Сложные функции

30. Дано: $y=z^2$, $z=x+1$. Выразить y как функцию x.

31. Дано: $y=\sqrt{z+1}$, $z=\operatorname{tg}^2 x$. Выразить y как функцию x.

32. Дано: $y=z^2$, $z=\sqrt[3]{x+1}$, $x=a^t$. Выразить y как функцию t.

33. Дано: $y=\sin x$; $v=\lg y$; $u=\sqrt{1+v^2}$. Выразить u как функцию x.

34. Дано: $y=1+x$; $z=\cos y$; $v=\sqrt{1-z^2}$. Выразить v как функцию x.

35. Следующие сложные функции представить с помощью цепочек, составленных из основных элементарных функций:

1) $y=\sin^3 x$; 2) $y=\sqrt[5]{(1+x)^2}$; 3) $y=\lg\operatorname{tg} x$;

4) $y=\sin^3(2x+1)$; 5) $y=5^{(3x+1)^2}$.

36. $f(x)=x^3-x$; $\varphi(x)=\sin 2x$. Найти:

а) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$; б) $\varphi[f(1)]$; в) $\varphi[f(2)]$; г) $f[\varphi(x)]$;

д) $f[f(x)]$; е) $f\{f[f(1)]\}$; ж) $\varphi[\varphi(x)]$.

37. Доказать справедливость следующего способа построения графика сложной функции $y=f[\varphi(x)]=F(x)$ по известным графикам составляющих функций: $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$. Из точки A графика функции $\varphi(x)$ (рис. 4), соответствующей данному значению независимой переменной x, проводится прямая, параллельная оси Ox, до пересечения в точке B с биссектрисой первого и третьего координатных углов; из точки B проводится прямая, параллельная оси Oy, до пересечения с графиком функции $f(x)$ в точке C. Если из точки C провести прямую, параллельную оси Ox, то точка D ее пересечения с прямой NN' будет точкой графика функции $F(x)$, соответствующей взятому значению x.

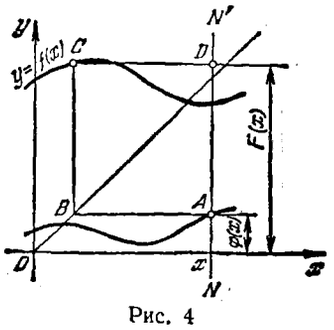


Рис. 4

Неявные функции

38. Написать в явном виде функцию y, неявно заданную следующим уравнением:

1) $x^2+y^2=1$; 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 3) $x^3+y^3=a^3$;

4) $xy=C$; 5) $2^{xy}=5$; 6) $\lg x+\lg(y+1)=4$;

7) $2^{x+y}(x^2-2)=x^3+7$; 8) $(1+x)\cos y-x^2=0$.

39*. Показать, что при $x>0$ уравнение $y+|y|-x-|x|=0$ определяет функцию, графиком которой является биссектриса первого координатного угла, а при $x\leqslant 0$ данному уравнению удовлетворяют координаты всех точек третьего координатного угла (включая и его граничные точки).