

Лекция 6. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла

1. Интеграл с переменным верхним пределом. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad (1)$$

который называют *интегралом с переменным верхним пределом*.

а) *Непрерывность интеграла.*

Теорема 1. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Пусть $x \in [a, b]$ и $x + \Delta x \in [a, b]$. Докажем, что $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

В силу свойств интеграла

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \quad (2)$$

Так как функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена, т.е.

$$\exists M > 0: \forall x \in [a, b] \rightarrow |f(x)| \leq M. \quad (3)$$

Согласно правилу оценки интеграла из (2) и (3) следует, что

$$|\Delta F| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq M \cdot \Delta x,$$

откуда получаем $\Delta F \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. функция F непрерывна в точке x . Поскольку x – произвольная точка отрезка $[a, b]$, то функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$.

б) *Дифференцируемость интеграла.*

Теорема 2. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x_0 , причем

$$F'(x_0) = f(x_0). \quad (4)$$

в) *Существование первообразной у непрерывной функции.*

Теорема 3. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она имеет первообразную на этом отрезке, причем первообразной для функции f является интеграл с переменным верхним пределом (1), и поэтому

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C, \quad (8)$$

где C – произвольная постоянная.

Доказательство. Пусть x – произвольная точка отрезка $[a, b]$. По теореме 2 функция $F(x)$, определяемая формулой (1), имеет в точке x производную, равную $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x). \quad (9)$$

Согласно определению первообразной функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, и поэтому справедливо равенство (8).

Согласно теореме 3 (формула (9)) операция интегрирования непрерывной функции с переменным верхним пределом является обратной к операции дифференцирования. Утверждение о том, что производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна значению подынтегральной функции при значении аргумента, равном верхнему пределу интеграла, является важнейшим фактом курса математического анализа.

Следствие. Всякая первообразная $\Phi(x)$ для функции f , непрерывной на отрезке $[a, b]$, имеет вид

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C, \quad a \leq x \leq b, \quad (10)$$

где C – произвольная постоянная.

2. Вычисление определенных интегралов.

а) Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и если $\Phi(x)$ – какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (11)$$

Доказательство. Согласно следствию из теоремы 3 существует число C такое, что справедливо равенство (10). Подставляя в формулу (10) $x = a$ и учитывая, что $\int_a^a f(t) dt = 0$, получаем $C = \Phi(a)$. Поэтому равенство (10) можно записать в виде

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + \Phi(a). \quad (12)$$

Равенство (12) выполняется при любых значениях $x \in [a, b]$ и, в частности, при

$$x = b, \text{ т.е. } \Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + \Phi(a),$$

откуда следует формула (11), так как величина определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначается независимое переменное в интеграле.

Формулу Ньютона-Лейбница называют *основной формулой интегрального исчисления* и часто записывают в виде $\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b$.

б) Замена переменного.

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a_0, b_0) , а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на интервале (α_0, β_0) , причем $\varphi(t) \in (a_0, b_0)$ при всех $t \in (\alpha_0, \beta_0)$. Тогда если $\alpha \in (\alpha_0, \beta_0)$, $\beta \in (\alpha_0, \beta_0)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то справедлива формула замены переменного в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (13)$$

Доказательство. Так как $a \in (a_0, b_0)$, $b \in (a_0, b_0)$, а функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a_0, b_0) , то по формуле Ньютона-Лейбница находим

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (14)$$

где $\Phi'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a_0, b_0)$.

Функция $\Phi(\varphi(t))$ является первообразной для функции, стоящей под знаком интеграла в правой части формулы (13), так как

$$\frac{d}{dt}(\Phi(\varphi(t))) = \Phi'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Применяя к функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ формулу Ньютона-Лейбница и учитывая, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (15)$$

Из равенств (14) и (15) следует формула (13).

При условиях теоремы 5 формула (13) справедлива как при $\alpha \leq \beta$, так и при $\alpha > \beta$.

Пример 1. Вычислить $J = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

Решение. Полагая $x = R \sin t$, где $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, получаем $\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos t$,

$dx = R \cos t dt$. По формуле (13) находим $J = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi R^2}{4}$.

Пример 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a, a]$.

Доказать, что: а) если f – нечетная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$; б) если f – четная

функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ (*).

Решение. а) если f – нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-a, a]$, то полагая $x = -t$ и используя формулу (13), получаем

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_{-a}^0 f(-t)dt = \int_0^a (-f(t))dt = - \int_0^a f(x)dx,$$

откуда следует, что $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$.

б) если f – четная функция, то $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$, откуда следует (*).

Пример 3. Доказать, что если f – непрерывная на R периодическая с периодом T функция, то для любого $a \in R$ справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx. \quad (16)$$

Решение. Используя свойства интеграла, запишем равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx. \quad (17)$$

Полагая $x = t + T$ и учитывая, что функция f определена на R и $f(t + T) = f(t)$ для всех $t \in R$ в силу периодичности функции f , получаем

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t + T)dt = \int_0^a f(t)dt = - \int_a^0 f(x)dx. \quad (18)$$

Из равенств (17) и (18) следует формула (16).

Пример 4. Вычислить $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin^5 x \cos^8 x dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция является периодической с периодом 2π и нечетной, то, используя примеры 3 и 4, получаем

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x \cos^8 x dx = 0.$$

а) *Интегрирование по частям.*

Теорема 6. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx. \quad (19)$$

Доказательство. Интегрируя на отрезке $[a, b]$ тождество

$$uv' = (uv)' - u'v,$$

где uv' , $(uv)'$, $u'v$ – непрерывные функции, получаем

$$\int_a^b uv' dx = \int_a^b (uv)' dx - \int_a^b vu' dx. \quad (20)$$

По формуле Ньютона-Лейбница находим $\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Поэтому равенство (20) можно записать в виде (19).

Учитывая, что $v' dx = dv$, $u' dx = du$, формулу (19) записывают в виде

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 5. Вычислить $J = \int_1^2 x \ln x dx$.