Лекция 8. ***Приложения определённого интеграла***

Площадь криволинейной трапеции

Одной из основных задач, приводящих к понятию определенного интеграла, является задача о площади криволинейной трапеции, т. е. фигуры G, задаваемой на плоскости Oxy условиями

$$G = \{(x, y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Утверждение 1. Криволинейная трапеция G – квадрируемая фигура, площадь которой $S = S(G)$ выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

а) Рассмотрим фигуру D (рис. 1), ограниченную отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $x \in [a;b]$. Если $f_1(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$, то площадь фигуры D равна разности площадей криволинейных трапеций D_2 и D_1,
где $D_i = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_i(x)\}, i = 1, 2.$

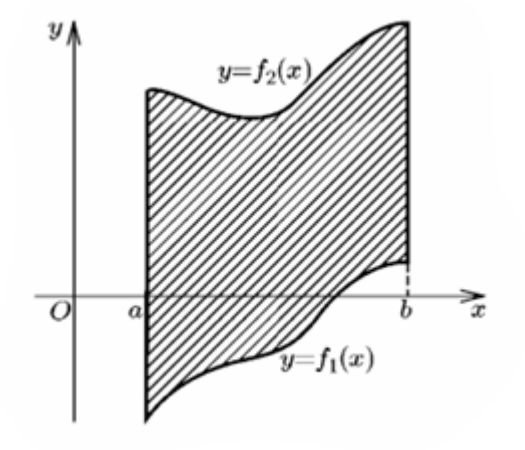


Рисунок 1.

Поэтому площадь S_D фигуры D выражается формулой

$$S_D = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Формула остается в силе и в случае, когда не выполняется условие $f_1(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$. Чтобы убедиться в этом, достаточно сдвинуть фигуру D вдоль положительного направления оси Oy на $y_0 = \left|\min_{x\in[a,b]} f_1(x)\right|$ и воспользоваться тем, что площади равных фигур совпадают.

б) Область D ограничена отрезками прямых $y = c$ и $y = d$ и графиками непрерывных на отрезке $[c, d]$ функций $x = g_1(y)$ и $x = g_2(y)$, причём $g_1(y) \leq g_2(y)$, тогда

$$S_D = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))\,dy.$$

Пример 1. Найти площадь S фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Искомая площадь S равна 4σ, где σ (рис. 2) – площадь криволинейной трапеции, ограниченной осями Ox , Oy и графиком функции $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, 0 \leq x \leq a.$

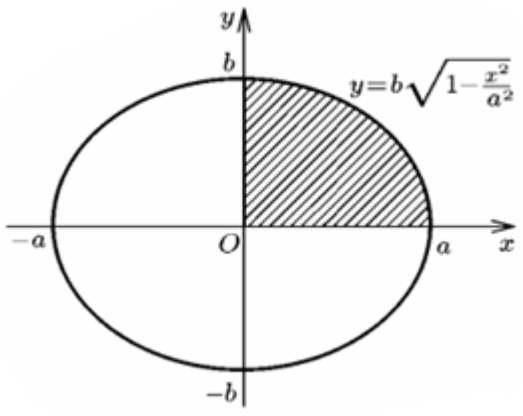


Рисунок 2

По формуле (1) находим

$$\sigma = b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = ab\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\pi ab$$

Итак, площадь, ограниченная эллипсом с полуосями a и b, равна $S = \pi ab$. В частности, площадь круга радиуса R равна πR^2.

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x - -x^2$ и прямой $y = x + 4$.

Решение. Парабола $y = 6x - x^2$ пересекается с прямой $y = x + 4$ в точках *A* и *B* (рис. 3),

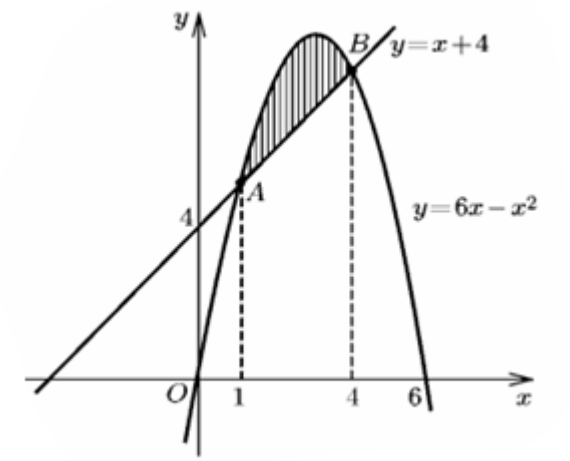


Рисунок 3

абсциссы которых являются корнями уравнения

$$6x - x^2 = x + 4 \text{ ю}$$

Решая это уравнение, находим его корни $x_1 = 1, x_2 = 4$. Согласно формуле (2) искомая площадь *S* равна

$$S = \int_1^4 \big((6x - x^2) - (x + 4)\big)\,dx = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

Вычисление площади плоской фигуры в полярной системе координат

а) *Полярная система* координат задается полярной осью *Ox*, полюсом – точка *O* и масштабной единицей (рис. 4)

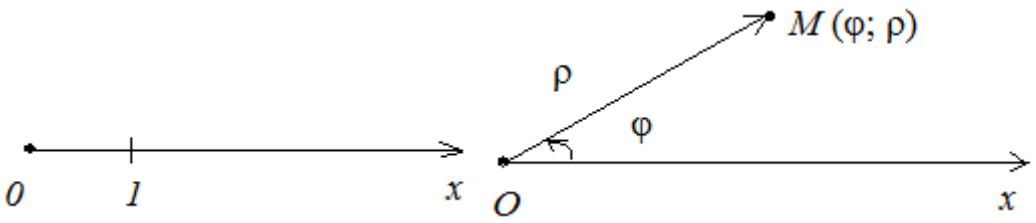


Рисунок 4

Точка *M* в этой системе задаётся двумя координатами (φ и ρ): φ – угол наклона радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ к оси *Ox*; ρ – длина радиуса-вектора $\left|\overrightarrow{OM}\right|$.

Формулы перехода от полярной системы координат к прямоугольной системе, связанной с полярной точкой начала координат – точка *0*, осью абсцисс с полярной осью и осью ординат, перпендикулярной полярной оси

$$M(\varphi;\rho) = M(x; y): \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Уравнение кривой в полярной системе координат – соотношение между ρ и φ: ρ = ρ (φ).

б) Площадь криволинейного сектора в полярной системе, ограниченного лучами φ =α и φ = β, кривой ρ = ρ(φ) (рис. 5), вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi .$$

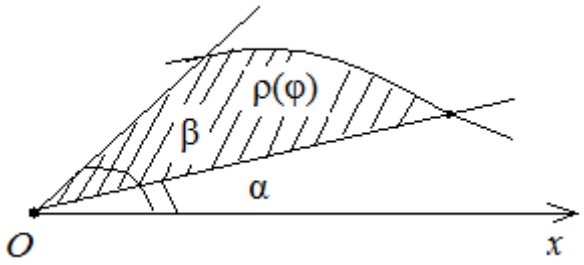


Рис.5

Пример 3. Найти площадь фигуры G, которая ограничена лемнискатой Бернулли (рис. 6), заданной уравнением $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

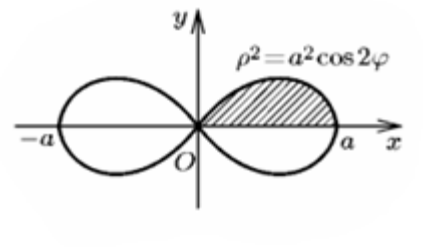


Рисунок 6

Решение. Фигура G симметрична относительно координатных осей. Площадь σ той части фигуры G, которая лежит в первом квадранте, согласно формуле равна

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{4}.$$

Поэтому искомая площадь $S = 4\sigma = a^2$.

Вычисление объёма тела по площадям параллельных сечений

Пусть задано объёмное тело T, для которого известна площадь $S(x)$ любого сечения плоскостью, проходящей через точку $(x;0;0)$ перпендикулярно оси Ox, $a \le x \le b$ (рис. 7). Нужно вычислить объём тела.

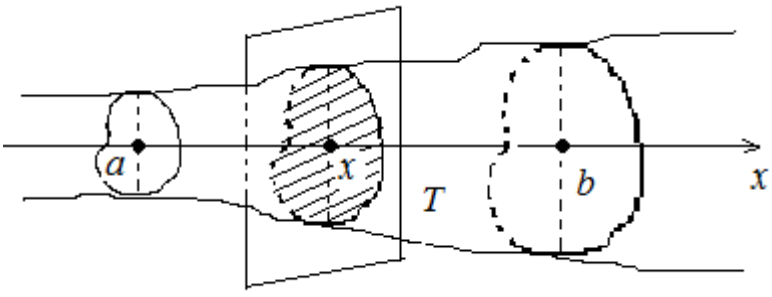


Рис. 7

Пусть функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда объём тела T вычисляется по формуле:

$$V_T = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x .$$

Вычисление объёма тела вращения

Надо вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции *ABCD*, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *Ox* и прямыми $x = a$, $x = b$.

В таком случае площадь поперечного сечения в точке $x \in [a;b]$ круг радиусом $f(x)$ равна:

$$S(x) = \pi \cdot f^2(x) .$$

Тогда объём тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции *ABCD*, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x .$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции *ABCD*, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, осью *Oy* и прямыми $y = c$, $y = d$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y .$$