Лекция 5.

Тема: Логарифм числа. Логарифмическая функция.

Цель: сформировать понимание логарифма как показателя степени, изучить основные свойства логарифмов и научиться решать простейшие логарифмические неравенства с учётом области допустимых значений.

Задачи:

- **образовательные:** ввести определение логарифма; разобрать основные свойства логарифмов и их применение; изучить алгоритм решения логарифмических неравенств;
- **развивающие:** развивать умение преобразовывать выражения, анализировать основание логарифма и обосновывать каждый шаг решения;
- **воспитательные:** формировать внимательность к ограничениям, точность записи и самостоятельность при решении задач.

Ход лекции

1. Что такое логарифм?

Логарифм отвечает на вопрос: в какую степень нужно возвести основание, чтобы получить заданное число?

Логарифмом положительного числа b по основанию a называется показатель степени x, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b.

$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$

Здесь a — основание логарифма, b — логарифмируемое число, x — значение логарифма. Для определения логарифма необходимо, чтобы:

$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

Например, $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$. Аналогично $\log_{10} 100 = 2$, так как $10^2 = 100$.

2. Основные примеры

$\log_3 81 = 4$, потому что $3^4 = 81$.

$\log_5 1 = 0$, потому что $5^0 = 1$.

$\log_7 7 = 1$, потому что $7^1 = 7$.

$\log_2 (1/8) = -3$, потому что $2^{-3} = 1/8$.

Обратите внимание: логарифм единицы при любом допустимом основании равен нулю, а логарифм основания равен единице.

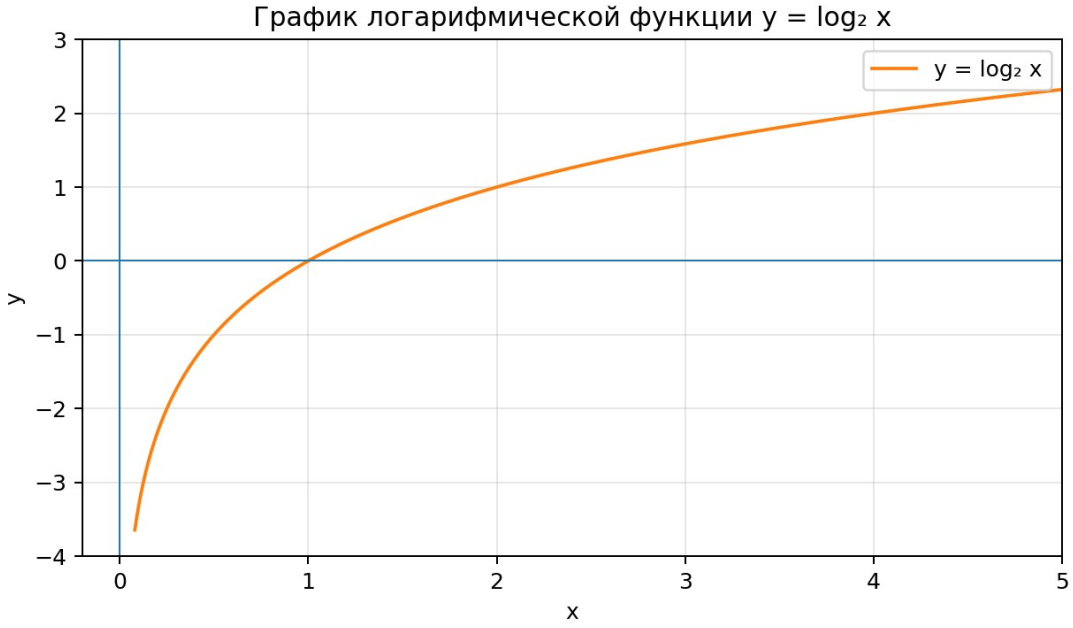
$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1$

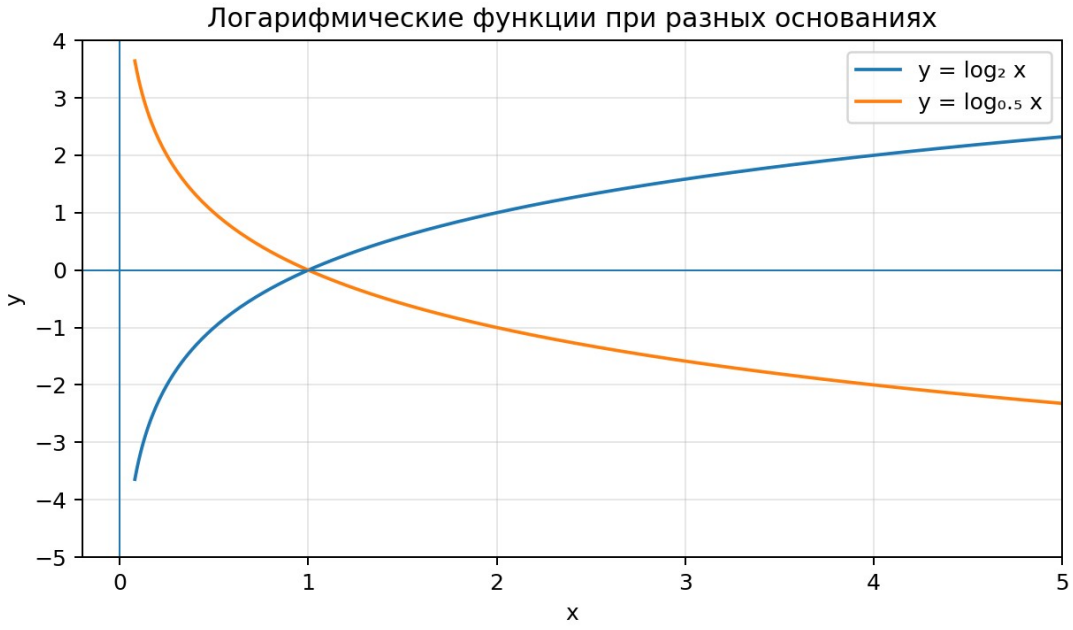
3. Логарифмическая функция и её график

Логарифмическая функция имеет вид:

$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

Её область определения: $x > 0$. График проходит через точку (1; 0), поскольку $\log_a 1 = 0$. Если $a > 1$, функция возрастает; если $0 < a < 1$, функция убывает.





Логарифмическая и показательная функции с одним и тем же основанием являются взаимно обратными. Это означает, что они «отменяют» действия друг друга.

$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = x$

Основное логарифмическое тождество

Из определения логарифма следует основное тождество:

$a^{(\log_a b)} = b$

Оно справедливо при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$. Например, $3^{(\log_3 7)} = 7$. Показатель $\log_3 7$ означает именно ту степень, в которую нужно возвести 3, чтобы получить 7.

Также полезно помнить равенство $\log_a(a^x) = x$, если $a > 0$, $a \neq 1$. Например, $\log_2(2^5) = 5$.

4. Свойства логарифмов

Все свойства ниже применяются при допустимых значениях выражений: основания логарифмов положительны и не равны 1, а аргументы логарифмов положительны.

Свойство 1. Логарифм единицы

$$\log_a 1 = 0$$

Поскольку $a^0 = 1$ для любого допустимого основания a. Пример: $\log_6 1 = 0$.

Свойство 2. Логарифм основания

Поскольку $a^1 = a$. Пример: $\log_9 9 = 1$.

$$\log_a a = 1$$

Свойство 3. Логарифм произведения

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел по одному и тому же основанию.

Пример: $\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$. Проверка: $8 \cdot 4 = 32$, а $\log_2 32 = 5$.

Свойство 4. Логарифм частного

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя. Пример: $\log_3(81/9) = \log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$. Действительно, $81/9 = 9$ и $\log_3 9 = 2$.

Свойство 5. Логарифм степени

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$$

Показатель степени можно вынести перед знаком логарифма. Здесь $x > 0$; n — действительное число, если выражение определено.

Пример: $\log_2(8^3) = 3 \cdot \log_2 8 = 3 \cdot 3 = 9$. Это согласуется с тем, что $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$.

Пример с корнем: $\log_5 \sqrt{25} = \log_5(25^{(1/2)}) = 1/2 \cdot \log_5 25 = 1/2 \cdot 2 = 1$.

5. Важные предостережения при преобразованиях

Нельзя заменять $\log_a(x + y)$ на $\log_a x + \log_a y$: такого свойства нет.

Нельзя забывать условие положительности аргумента: например, $\log_2(x - 3)$ определён только при $x > 3$.

Свойства произведения и частного применяются только тогда, когда аргументы логарифмов допустимы.

Контрольные вопросы

1. Что показывает логарифм числа?
2. Какие ограничения накладываются на основание и аргумент логарифма?
3. Сформулируйте свойства логарифма произведения, частного и степени.
4. Почему нельзя раскладывать логарифм суммы по свойству произведения?