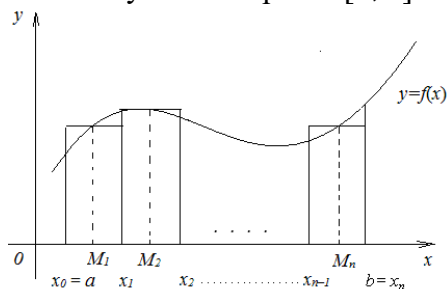


ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определения и свойства определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$



Определение 1. Сумма $S = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta x_k$ называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определение 2. Предел интегральных сумм S функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ при $n \rightarrow \infty$ и $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ называется *определённым интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$* , если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек M_k ($k = 1, \dots, n$) на каждой из частей.

Следовательно, можно записать: $S_{\text{крив.тр.}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$.

При этом отрезок $[a, b]$ называют отрезком интегрирования, « a » – нижним пределом интегрирования, « b » – верхним пределом.

Достаточное условие интегрируемости функции на отрезке $[a, b]$. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна, то определённый интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует, т.е. функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ интегрируема.

Свойства определённого интеграла

1) $\int_a^a f(x) dx = 0$	2) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
3) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$	4) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$

5) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$, причём верно равенство: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, при любом расположении точек a, b и c на оси Ox .

6) Если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

7) Если на отрезке $[a, b]$ $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

8) **Теорема 1 (о среднем значении определённого интеграла).** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдётся хотя бы одна точка c , в которой выполняется равенство: $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$

Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Phi(x)$ – какая-либо её первообразная на отрезке $[a, b]$. Тогда определённый интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен разности значений функции $\Phi(x)$ в точках b и a : $\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Формула Ньютона–Лейбница является основной формулой интегрального

исчисления, устанавливающей связь между определённым и неопределённым интегралами, и даёт правило вычисления определённого интеграла.

Замечание. Формулу Ньютона–Лейбница часто записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b, \text{ где используется обозначение: } \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Задача вычисления определённого интеграла сводится к нахождению первообразной непрерывной функции.

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1) Замена переменной в определённом интеграле

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, область значений этой функции – отрезок $[a, b]$, т.е. $a \leq \varphi(t) \leq b$ для $t \in [\alpha, \beta]$, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$$\text{Тогда справедливо равенство: } \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

2) Интегрирование по частям в определённом интеграле

Теорема 4. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо равенство: $\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx.$

Примеры с решениями

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

$$\text{Решение. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 1 - 0 = 1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_2^3 \frac{x}{x^2 + 1} dx.$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int_2^3 \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_2^3 = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 10 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{10}{5} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= \left[\begin{array}{c} \text{Замена} \\ \sqrt{x} = t \end{array} \right] x = t^2, dx = 2t dt, \left. \frac{x}{0} \right\| \frac{t}{\frac{0}{2}} = \int_0^2 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t} dt = \\ &= 2 \int_0^2 dt - 2 \int_0^2 \frac{dt}{1+t} = 2t \Big|_0^2 - 2 \ln(1+t) \Big|_0^2 = 4 - 0 - 2 \ln 3 + 2 \ln 1 = 4 - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Решение. Замена

$$x = 2 \sin t, \sqrt{4-x^2} = 2 \cos t$$

$$dx = 2 \cos t dt, \left. \begin{array}{l} x \\ t \end{array} \right|_0^2 \left| \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt =$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt =$$

$$= 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} (\sin 2\pi - \sin 0) = \pi.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_1^e x^2 \ln x dx$

Решение.

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{array} = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dV = \sin x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ V = -\cos x \end{array} = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \cos 0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 0 + 0 + 1 - 0 = 1.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$	2. $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx$
3. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4}$	4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x dx$
5. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$	6. $\int_3^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+9}$
7. $\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt{4x-3}}$	8. $\int_2^6 \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$
9. $\int_0^1 \frac{x-2}{\sqrt{1-x}} dx$	10. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}+1}$

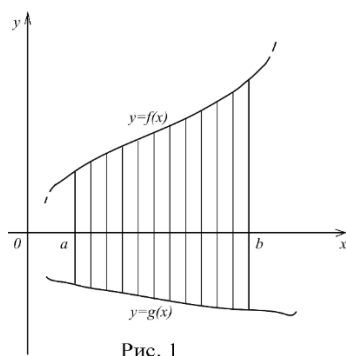
11. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $\int_0^4 x \sqrt{x^2+9} dx$
13. $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$	14. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$
15. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$	16. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}$
17. $\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx$	18. $\int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$
19. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$	20. $\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx$
21. $\int_1^e \ln x dx$	22. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$
23. $\int_0^{3\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$	24. $\int_0^1 \arcsin x dx$
25. $\int_0^1 x e^{-x} dx$	26. $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$
27. $\int_0^2 x \ln(x+1) dx$	28. $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (x+3) \sin 6x dx$
29. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{x}{2} dx$	30. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Понятие определенного интеграла широко применяется при вычислении различных геометрических и физических величин.

Геометрическое приложение определенного интеграла

1. Вычисление площади плоской фигуры (области (D))



а) Линии, ограничивающие область (D), заданы в декартовых координатах

Случай 1. Площадь области (D), ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ ($b > a$) и непрерывными кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$, где $f(x) > g(x) \forall x \in [a, b]$ (рис. 1), находится по формуле:

$$S_{(D)} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (1)$$

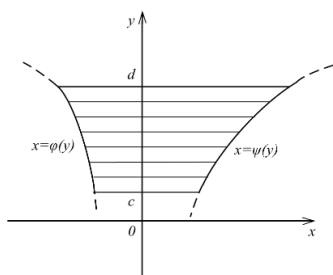


Рис. 2

Случай 2. Площадь области (D), ограниченная прямыми $y = c$, $y = d$ ($d > c$) и непрерывными кривыми $x = \varphi(y)$ и $x = \psi(y)$, где $\psi(y) \geq \varphi(y) \forall y \in [c, d]$ (рис. 2), находится по формуле:

$$S_{(D)} = \int_c^d [\psi(y) - \varphi(y)] dy. \quad (2)$$

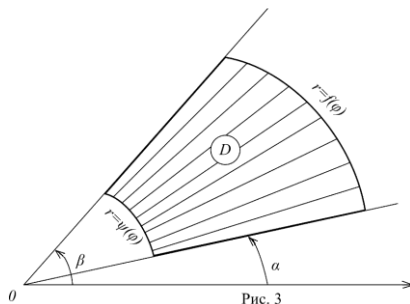


Рис. 3

б) Линии, ограничивающие область (D), заданы в полярной системе координат

Площадь области (D), ограниченной полярными лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\beta > \alpha$) и непрерывными полярными кривыми: $r = f(\varphi)$, $r = \psi(\varphi)$, где $\psi(\varphi) > f(\varphi) \forall \varphi \in [\alpha, \beta]$ находится по формуле:

$$S_{(D)} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\psi^2(\varphi) - f^2(\varphi)] d\varphi \quad (3)$$

2. Вычисление объема тела вращения

Формула для вычисления объема тела вращения, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси (Ox), имеет вид:

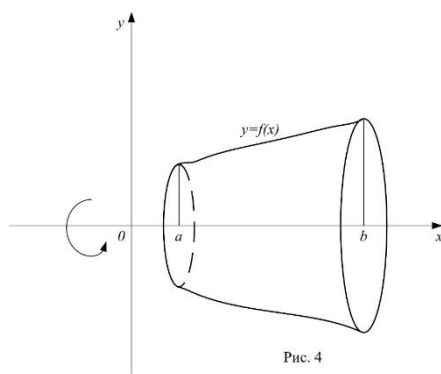


Рис. 4

$$V_{(Ox)} = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (4)$$

а вокруг оси (Oy):

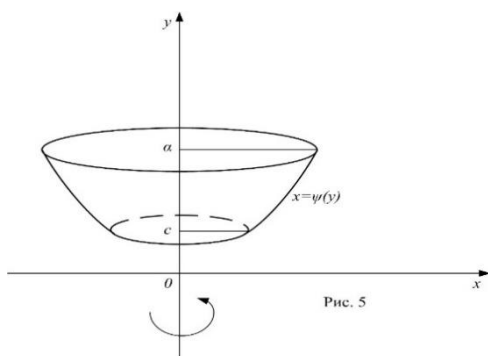


Рис. 5

$$V_{(Oy)} = \pi \int_c^a \psi^2(y) dy \quad (5)$$

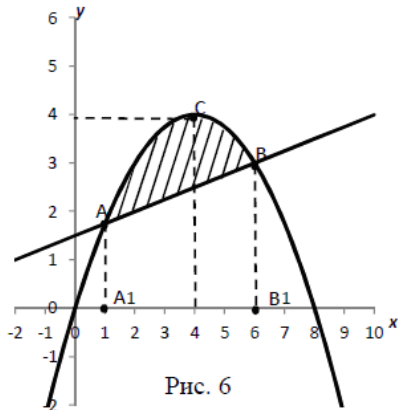
Приложение определенного интеграла к решению физических задач

1. Вычисление пути, пройденного материальной точкой при неравномерном движении по прямой со скоростью $V(t)$ за время $[t_1, t_2]$: $S = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$.

2. Вычисление работы, производимой переменной силой $F(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x = a$ до $x = b$: $A = \int_a^b F(x) dx$.

Примеры с решениями

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную линиями: параболой $4y = 8x - x^2$ и прямой $4y = x + 6$.



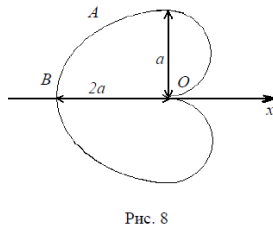
Решение. Построив данные линии, видно, что искомая площадь области ACB (рис.6) ограниченной сверху параболой и снизу прямой, которые пересекаются в точках $A(1, \frac{7}{4})$ и $B(6, 3)$, равна разности площадей A_1ACBB_1 и A_1ABB_1 . Тогда площадь области выражается интегралом в соответствии с формулой (1).

$$S_D = \frac{1}{4} \int_1^6 ((8x - x^2) - (x + 6)) dx = \frac{1}{4} \int_1^6 (7x - x^2 - 6) dx =$$

$$= \frac{1}{4} (7 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x) \Big|_1^6 = \frac{1}{4} (18 + \frac{17}{6}) = 5 \frac{5}{24}.$$

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой

$$\rho = a(1 - \cos \varphi), a > 0.$$



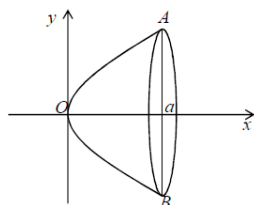
Решение. Кардиоиды симметричны относительно полярной оси (рис. 8). Тогда искомая площадь равна удвоенной площади криволинейного сектора OAB . Дуга OAB описывается концом полярного радиуса ρ при изменении угла φ от 0 до π . Используя формулу (3), найдем S .

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi =$$

$$= a^2 (\varphi - 2\sin \varphi) \Big|_0^\pi + \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1 + 2\cos \varphi) d\varphi = a^2 \pi + \frac{a^2}{2} (\varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi) \Big|_0^\pi =$$

$$= a^2 \pi + \frac{a^2}{2} \pi = \frac{3}{2} \pi a^2$$

Пример 3. Вычислить объём тела, образовавшегося вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2px$, $x = a$ вокруг оси Ox (рис. 9).



Решение. Построив параболу $y^2 = 2px$ и прямую $x = a$, получим внутреннюю область OAB при вращении её вокруг оси Ox , образуется сегмент параболоида вращения. Объём этого тела находим по формуле (4).

$$V = \int_{x1}^{x2} y^2 dx = \pi \int_0^a 2p x dx = \pi p x^2 \Big|_0^a = \pi p a^2$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.
2. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = \sqrt{x}$ и прямыми $y = 0$ и $x = 3$.
3. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = 2x^2 - 3x$ и прямой

$y = x$.

4. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной полукубической параболой $y^2 = x^3$ и прямой $x = 4$.

5. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x - 2$ и прямой $y = x - 4$.

6. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \ln x$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.

7. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2^x$ и $y = x - 2$ и прямыми $x = 0$, $x = 2$.

8. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 2x + 3$ и $y = 2x^2 - 13x + 15$.

9. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $x = y^2 - 3y$ и $x = 2 - y^2$.

10. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2$.

11. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

12. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x + 1)^2$ и $y^2 = x + 1$.

13. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2 + 3$ и $y = x^2 - 4x + 3$.

14. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y^2 = x + 3$ и $x + 2y = 5$.

15. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $x = (y - 2)^3$ и $x = 4y - 8$.

16. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $x = 4 - y^2$ и $x = y^2 - 2y$.

17. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $x = \sqrt{4 - y^2}$ и прямыми $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

18. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x - 1)^2$ и $y^2 = x - 1$.

19. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $x = 4 - (y - 1)^2$ и $x = y^2 - 4y + 3$.

20. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $x = (y + 1)^2$ и $x^2 = y + 1$.

21. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 9$ и $y = -x^2 + 4x - 3$.

22. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = (x - 3)^2$ и прямой $y = 0$.

23. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$ и $y = -2x^2 + 4x$.

24. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $x = y^2$.

25. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$.

26. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$.

27. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2$ и $x + y + 2 = 0$.

28. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y^2 = 9x$ и $y = 3x$.

29. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$.
30. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y^2 = x + 5$ и $y^2 = -x + 4$.

Литература

1. Захарова Т. Э. Математический анализ: Учебное пособие (специальность «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», факультет АЭС) / СибГУТИ – Новосибирск, 2013. – 51 с.
2. Рудаковская Е. Г., Аверина О. В., Воронов С. М., Старшова Т. Н., Хлынова Т. В., Ригер Т. В. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной (примеры и задачи): учеб. пособие – М.: РХТУ им. Д. И. Менделеева, 2013. – 132 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для студентов вузов. В 2-х ч. Ч. I/ — М.: Мир и образование, 2024. – 816 с.
4. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов. — М.: Лаборатория знаний, 2023. — 672 с.