Задание 3. Числовые последовательности.
Раскрытие неопределенности частное бесконечностей

Задача 1. Вычислить пределы числовых последовательностей

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}.$	**1.18** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}.$
1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}.$	**1.19** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}.$
1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}.$	**1.20** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}.$
1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}.$	**1.21** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}.$
1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}.$	**1.22** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}.$
1.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}.$	**1.23** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}.$
1.7 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}.$	**1.24** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}.$
1.8 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}.$	**1.25** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}.$
1.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}.$	**1.26** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}.$
1.10 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}.$	**1.27** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}.$
1.11 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}.$	**1.28** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}.$

1.12 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$.	**1.29** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$.
1.13 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$.	**1.30** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$.
1.14 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.	**1.31** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$.
1.15 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$.	**1.32** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n}{(n+2)^4-(n-2)^4}$.
1.16 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$.	**1.33** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-n)^2+(2+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$.
1.17 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$.	**1.34** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+3)^3+(n-3)^3}$.

Пример 1. Вычислить предел числовой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$.

Решение типового примера 1. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности (получается неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$), применить теорему о пределе частного нельзя, так как в условии этой теоремы предполагается существование конечных пределов. Поэтому сначала преобразуем данную последовательность, разделив числитель и знаменатель на n^2. Затем, применяя теоремы о пределе частного и о пределе суммы, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0+0}{3-0}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $2/3$.

Пример 2. Вычислить предел числовой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4-2}{\sqrt{n^8+3n+4}}$.

Решение типового примера 2. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности (неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$). Разделим числитель и знаменатель на n^4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4-2}{\sqrt{n^8+3n+4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^7}+\frac{4}{n^8}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^7}+\frac{4}{n^8}}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^4}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^7}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^8}}}=\frac{3-0}{\sqrt{1+0+0}}=\frac{3}{1}=3.$$

Ответ: 3.

Теория и методические указания

Определение. Если каждому натуральному числу $\{n\}$: 1, 2, 3, …, n, … поставлено в соответствие действительное число x_n, то множество чисел $\{x_n\}$: x_1, x_2, x_3, …, x_n, … называется числовой последовательностью.

Числа x_1, x_2, x_3, …, x_n, … называются (наз-ся) *элементами* последовательности, символ x_n – *общим* элементом, а число n его *номером*.

Последовательность (посл-ть) задана если указан способ получения любого ее элемента.

Геометрически посл-ть изображается на координатной прямой в виде посл-ти точек, координаты которых равны соответствующим элементам посл-ти.

Арифметические действия над числовыми посл-тями.

Пусть даны две посл-ти $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

1) *произведение* посл-ти $\{x_n\}$ на число m определяет посл-ть

$$m\{x_n\} = \{mx_n\}\colon mx_1, mx_2, mx_3, \ldots, mx_n, \ldots;$$

2) *суммой* данных посл-тей называется посл-ть

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}\colon x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n, \ldots;$$

3) *разностью* – посл-ть

$$\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}\colon x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \ldots, x_n - y_n, \ldots;$$

4) *произведением* – посл-ть

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}\colon x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \ldots, x_ny_n, \ldots;$$

5) *частным* – посл-ть

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}\colon \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots, \text{если } y_n \neq 0.$$

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *ограниченной сверху*, если существует (сущ-т) число M такое, что любой элемент x_n этой посл-ти удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$; в символической записи $\exists M \forall x_n\colon x_n \leq M$.

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *ограниченной снизу*, если сущ-т число m такое, что любой элемент x_n этой посл-ти удовлетворяет неравенству $x_n \geq m$, т. е. $\exists m \forall x_n\colon x_n \geq m$.

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. $m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq N$, где $N = \max\{|m|, |M|\}$, т. е. $\exists N \forall x_n\colon |x_n| \leq N$.

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *неограниченной*, если для любого положительного числа A сущ-т элемент x_n этой посл-ти, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$ (т. е. либо $x_n > A$, либо $x_n < -A$). т. е. $\forall A \exists x_n\colon |x_n| > A$.

Из данных определений следует, что если посл-ть ограничена сверху, то все ее элементы принадлежат промежутку $]-\infty, M]$, если ограничена снизу — промежутку $[m, +\infty[$, если ограничена и сверху и снизу — промежутку $[m, M]$.

Посл-ть $\{x_n\}$ наз-ся *бесконечно большой* (б. б.), если для любого положительного числа A сущ-т номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > A$, т. е. $\forall A \exists N \forall n > N\colon |x_n| > A$. (Отметим, что любая б. б. посл-ть является неограниченной, однако неограниченная посл-ть может и не быть б. б.)

Посл-ть $\{\alpha_n\}$ наз-ся *бесконечно малой* (б. м.), если для любого положительного числа ε сущ-т номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N\colon |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Если $\{x_n\}$ б. б. посл-ть и все ее элементы отличны от нуля, то посл-ть $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – б. м. и, обратно, если $\{\alpha_n\}$ – б. м. посл-ть и $\alpha_n \neq 0$, то посл-ть $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – б. б.*

Основные свойства б. м. последовательностей

Теорема 2. *Сумма и разность двух б. м. посл-тей есть б. м. посл-ти.*

Теорема 3. *Произведение двух б. м. посл-тей есть б. м. посл-ть.*

(Отметим, что частное двух б. м. посл-тей может не быть б. м. посл-тью и даже может не иметь смысла.)

Теорема 4. *Произведение ограниченной посл-ти на б. м. посл-ть есть б. м. посл-ть.*

Следствие. *Произведение б. м. посл-ти на число есть б. м. посл-ть.*

Предел последовательности

Определение. Число a наз-ся *пределом* посл-ти $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon, \tag{1}$$

т. е. $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon.$$

Посл-ть, имеющая предел, наз-ся *сходящейся* (сх-ся). Если посл-ть $\{x_n\}$ сх-ся и имеет своим пределом число a, то символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{2}$$

Посл-ть, не являющаяся сх-ся наз-ся *расходящейся*.

Замечание 1. *Если посл-ть* $\{x_n\}$ *имеет своим пределом число* a*, тогда* $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ *является б. м. посл-тью.*

Замечание 2. *Неравыенство* (1) *равносильно неравенствам*

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \ \text{ или } \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

которые означают, что элемент $\{x_n\}$ *находится в* ε*-окрестности точки* a*.*

Основные свойства сх-ся последовательностей

Лемма 1. *Если все элементы б. м. посл-ти* $\{\alpha_n\}$ *равны одному и тому же числу* c*, то* $c = 0$*.*

Теорема 5. *Сх-ся посл-ть имеет только один предел.*

Теорема 6. *Сх-ся посл-ть ограничена.*

Замечание 3. *Ограниченная посл-ть может и не быть сходящейся.*

Теорема 7. *Сумма (разность) двух сх-ся посл-тей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *есть сх-ся посл-ть, предел которой равен сумме (разности) пределов посл-тей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$*:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{3}$$

Теорема 8. *Произведение двух сх-ся посл-тей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *есть сх-ся посл-ть, предел которой равен произведению пределов посл-тей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$*:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{4}$$

Теорема 9. *Частное двух сх-ся посл-тей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *при условии, что предел* $\{y_n\}$ *отличен от нуля есть сх-ся посл-ть, предел которой равен частному пределов посл-тей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$*:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \tag{5}$$