Функция. Область определения функции

Задача 1. Найти область определения функции $y = f(x)$

1.1 $y = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x}$	1.18 $y = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$
1.2 $y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$	1.19 $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$
1.3 $y = \lg(3x - 1) + 2\lg(x + 1)$	1.20 $y = \sqrt{x} - \ln(2x - 3)$
1.4 $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}$	1.21 $y = -\lg\left(4 - x^2\right)$
1.5 $y = \frac{x-2}{\cos(2x)}$	1.22 $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$
1.6 $y = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$	1.23 $y = \frac{1}{\ln(2-x)} + \sqrt{x-3}$
1.7 $y = \frac{2x^2+3}{x+\sqrt{x^2-4}}$	1.24 $y = \lg\sin x$
1.8 $y = \frac{\lvert x\rvert-2}{\cos(x)}$	1.25 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
1.9 $y = \sqrt{\frac{x}{3-2x}} - \sqrt{\sin(2x)}$	1.26 $y = \arccos\sqrt{2x}$
1.10 $y = \lg(3x + 1) + 2\lg(x - 1)$	1.27 $y = \arcsin(x - 2)$
1.11 $y = \arccos\left(\frac{x}{3} - 1\right)$	1.28 $y = \sqrt{20 - 5x^2}$
1.12 $y = \sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{x-1}$	1.29 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-8}}$
1.13 $y = \lg\left(x^2 - 4x + 3\right)$	1.30 $y = \lg\left(x^2 + 2x + 3\right)$
1.14 $y = \arcsin\frac{x-3}{2}$	1.31 $y = \arcsin\frac{x}{4}$
1.15 $y = \sqrt{4 - \lvert x\rvert}$	1.32 $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$
1.16 $y = \sqrt{8 - 2x^2} + \frac{1}{x+1}$	1.33 $y = \sqrt{1 - \lvert x\rvert}$
1.17 $y = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$	1.34 $y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

Пример 1. Найти область определения функции $y(x) = \frac{x-2}{2x-1}$.

Решение типового примера 1. Функция $f(x) = \frac{x-2}{2x-1}$ определена, если знаменатель дроби не равен нулю: $2x - 1 \neq 0$, т.е. если $x \neq \frac{1}{2}$. Таким образом, областью определения функции является объединение двух интервалов: $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ и $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Ответ: $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Пример 2. Найти область определения функции $y(x)=\frac{\lg(1+x)}{x-1}$.

Решение типового примера 2. Функция $f(x)=\frac{\lg(1+x)}{x-1}$ определена, если знаменатель дроби не равен нулю: $x-1\neq 0$ и аргумент логарифмической функции положительный: $1+x>0$ т.е. если $x\neq 1$ и $x>-1$. Таким образом, областью определения функции является объединение двух интервалов: $]-1,1[$ и $]1,+\infty[$.

Ответ: $x\in\,]-1,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

Пример 3. Найти область определения функции $y(x)=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$.

Решение типового примера 3. Первое слагаемое $f_1(x)=\sqrt{1-2x}$ определена при $1-2x\geq 0$, а второе при $-1\leq\frac{3x-1}{2}\leq 1$. Таким образом, для нахождения области определения функции необходимо решить систему неравенств

$$\begin{cases}1-2x\geq 0,\\ \frac{3x-1}{2}\geq -1,\\ \frac{3x-1}{2}\leq 1,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x\leq\frac{1}{2},\\ x\leq 1,\\ x\geq-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Следовательно, областью определения будет отрезок $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

Справка. *Основные элементарные функции:*

$y=C$, $C=\text{const}$ (*постоянная функция*), $D(y)=R^1=\,]-\infty,+\infty[$; $E(y)=C$.

$y=kx+b$ (*линейная функция*), $D(y)=R^1$; $E(y)=R^1$.

$y=x^{\alpha}$ (*степенная функция*), $\alpha\in R^1$, $E(y)$, $D(y)$ зависят от α.

$y=a^{x}$ (*показательная функция*), $a>0$, $a\neq 1$, $D(y)=R^1$, $E(y)=(0,+\infty)$.

$y=\log_a x$ (*логарифмическая функция*), $a>0$, $a\neq 1$, $D(y)=(0;+\infty)$, $E(y)=R^1$.

Тригонометрические функции:

$y=\sin x$, $D(y)=R^1$, $E(y)=[-1;+1]$.

$y=\cos x$, $D(y)=R^1$, $E(y)=[-1;+1]$.

$y=\text{tg}x$, $D(y)=\bigcup\limits_{n\in Z}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $E(y)=R^1$.

$y=\text{ctg}x$, $D(y)=\bigcup\limits_{n\in Z}(\pi n,\pi+\pi n)$, $E(y)=R^1$.

Обратные тригонометрические функции:

$y=\arcsin x$, $D(y)=[-1;+1]$, $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

$y=\arccos x$, $D(y)=[-1;+1]$, $E(y)=[0;\pi]$.

$y=\text{arctg}\,x$, $D(y)=R^1$, $E(y)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

$y=\text{arcctg}\,x$, $D(y)=R^1$, $E(y)=(0;\pi)$.