Задание 4. Числовые последовательности.
Раскрытие неопределенности разность бесконечностей

Задача 1. Вычислить пределы числовых последовательностей

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right).$	1.18 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\ (n+5)}-n\right).$
1.2 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right).$	1.19 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right).$
1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}.$	1.20 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(n^3+1\right)\left(n^2+3\right)}-\sqrt{n\left(n^4+2\right)}}{2\sqrt{n}}.$
1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2-4\right)}-\sqrt{n^4-9}\right]$	1.21 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2\right)}-\sqrt{\left(n^2-1\right)\left(n^2-2\right)}\right].$
1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n\left(n^2+5\right)}}{\sqrt{n}}.$	1.22 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(n^5+1\right)\left(n^2-1\right)}-n\sqrt{n\left(n^4+1\right)}}{n}.$
1.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right).$	1.23 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(n^4+1\right)\left(n^2-1\right)}-\sqrt{n^6-1}}{n}.$
1.7 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{4-n^3}\right).$	1.24 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-\sqrt{n\ (n-1)}\right].$
1.8 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right].$	1.25 $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt[3]{n^2\left(n^6+4\right)}-\sqrt[3]{\left(n^8-1\right)}\right).$
1.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right].$	1.26 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sqrt{n}\ -\sqrt{n\ (n+1)(n+2)}\right].$
1.10 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n\left(n^4-1\right)}-\sqrt{n^5-8}\right).$	1.27 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right).$
1.11 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right).$	1.28 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n\ +2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right).$
1.12 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right).$	1.29 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right).$
1.13 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right].$	1.30 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right).$
1.14 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}.$	1.31 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(n^2+5\right)\left(n^4+2\right)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}.$
1.15 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right).$	1.32 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2+3}\right).$

1.16 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right).$	1.33 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n\left(n^4+2\right)}-\sqrt{n^5-7}\right).$
1.17 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n\left(n^5+9\right)}-\sqrt{\left(n^4-1\right)\left(n^2+5\right)}}{n}.$	1.34 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3+6}\right)n\sqrt{n}.$

Пример 1. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}\right)$ используя формулу разности квадратов $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Решение типового примера 1. Неопределённость $(\infty-\infty)$. Умножим и разделим рассматриваемое выражение на $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}$ — в результате получим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n-2}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n-2}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{n+1-n+2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=\frac{3}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $3/2$.

Пример 2. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3+6}\right)n^2$ используя формулу разности кубов $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Решение типового примера 2. Неопределённость $(\infty-\infty)$. Умножим и разделим рассматриваемое выражение на $n^2+n\sqrt[3]{n^3+6}+\sqrt[3]{(n^3+6)^2}$ — в результате получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3+6}\right)n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt[3]{n^3+6}\right)\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3+6}+\sqrt[3]{(n^3+6)^2}\right)}{\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3+6}+\sqrt[3]{(n^3+6)^2}\right)}n^2=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-\left(\sqrt[3]{n^3+6}\right)^3}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+6}+\sqrt[3]{(n^3+6)^2}}n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^3-6}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+6}+\sqrt[3]{(n^3+6)^2}}n^2=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-6n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+6}+\sqrt[3]{(n^3+6)^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-6}{1+\sqrt[3]{1+\frac{6}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{6}{n^3}\right)^2}}=$$

$$=\frac{-6}{1+\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[3]{(1+0)^2}}=-2.$$

Ответ: -2.

Теория и методические указания

Определение. Если каждому натуральному числу $\{n\}$: 1, 2, 3, …, n, … поставлено в соответствие действительное число x_n, то множество чисел $\{x_n\}$: x_1, x_2, x_3, …, x_n, … называется числовой последовательностью.

Числа x_1, x_2, x_3, …, x_n, … называются (наз-ся) *элементами* последовательности, символ x_n – *общим* элементом, а число n его *номером*.

Последовательность (посл-ть) задана если указан способ получения любого ее элемента.

Геометрически посл-ть изображается на координатной прямой в виде посл-ти точек, координаты которых равны соответствующим элементам посл-ти.

Предел последовательности

Определение. Число a наз-ся *пределом* посл-ти $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon, \tag{1}$$

т. е. $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon.$$

Посл-ть, имеющая предел, наз-ся *сходящейся* (сх-ся). Если посл-ть $\{x_n\}$ сх-ся и имеет своим пределом число a, то символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{2}$$

Посл-ть, не являющаяся сх-ся наз-ся *расходящейся*.

Замечание 1. *Если посл-ть $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a, тогда $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ является б. м. посл-тью.*

Замечание 2. *Неравенство* (1) *равносильно неравенствам*

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \ \text{ или } \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

которые означают, что элемент $\{x_n\}$ находится в ε-окрестности точки a.

Основные свойства сх-ся последовательностей

Лемма 1. *Если все элементы б. м. посл-ти $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу c, то $c = 0$.*

Теорема 5. *Сх-ся посл-ть имеет только один предел.*

Теорема 6. *Сх-ся посл-ть ограничена.*

Замечание 3. *Ограниченная посл-ть может и не быть сходящейся.*

Теорема 7. *Сумма (разность) двух сх-ся посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сх-ся посл-ть, предел которой равен сумме (разности) пределов посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{3}$$

Теорема 8. *Произведение двух сх-ся посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сх-ся посл-ть, предел которой равен произведению пределов посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{4}$$

Теорема 9. *Частное двух сх-ся посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел $\{y_n\}$ отличен от нуля есть сх-ся посл-ть, предел которой равен частному пределов посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \tag{5}$$