Задание 6 - Предел функции в точке. Раскрытие неопределенностей

Задача 1. Вычислить пределы функций

1.1 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.	1.18 $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.
1.2 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.	1.19 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.
1.3 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.	1.20 $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.
1.4 $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.	1.21 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.
1.5 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.	1.22 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.
1.6 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.	1.23 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.
1.7 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.	1.24 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.
1.8 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.	1.25 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.
1.9 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.	1.26 $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.
1.10 $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$.	1.27 $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$.
1.11 $\lim\limits_{x \to 1/4} \dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$.	1.28 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.
1.12 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$.	1.29 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.
1.13 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.	1.30 $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$.
1.14 $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.	1.31 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

1.15 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.	1.32 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+2}-1}$
1.16 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$.	1.33 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$
1.17 $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.	1.34 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$

Пример. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}.$$

Решение типового примера. Неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{x+4}+2$ (выражение, сопряжённое числителю)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2 - 2^2}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $1/4$.

Теория и методические указания

Определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей). Пусть функция (ф-ция) $f(x)$ определена в окрестности (окр-ти) точки (т-ки) x_0, кроме, быть может, самой т-ки x_0. Рассмотрим в этой окр-ти посл-ть т-к

$$\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

Значения ф-ции в точках этой посл-ти также образуют числовую посл-ть

$$\{f(x_n)\}: f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \quad (2)$$

Число A наз-ся пределом ф-ции $f(x)$ в т-ке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой сх-ся к x_0 посл-ти (1) значений аргумента x, отличных от x_0 (т. е. $x \neq x_0$), соответствующая посл-ть (2) значений ф-ции сх-ся к числу A.

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ (или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$).

Ф-ция $f(x)$ может иметь в точке x_0 только один предел.

Определение предела функции по Коши (на языке $\varepsilon - \delta$).

Число A наз-ся пределом ф-ции $f(x)$ в т-ке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x из окр-ти т-ки x_0, кроме, быть может, самой т-ки x_0, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически это записывается так:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x: \ x \neq x_0, \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon.$

Отметим, что нер-ва $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ можно записать в виде $0 < |x - x_0| < \delta$.

Теорема 1. Определения предела ф-ции по Гейне и Коши эквивалентны.

Основные теоремы о пределах функции

Теорема 3. Пусть ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C, тогда ф-ции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (при $C \neq 0$) имеют в т-ке x_0 пределы, равные соответственно $B \pm C$, $B \cdot C$ и B/C.

Свойства конечных пределов

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = C$, тогда справедливы следующие равенства

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \pm C,$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \cdot C,$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(C \cdot f(x)\big) = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C \cdot B,$ где $C = \text{const},$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{B}{C},$ где $C \neq 0,$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x)\big)^k = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^k = B^k,$ где $k = \text{const}.$

Теорема 4. Пусть ф-ции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может, самой т-ки x_0, и функции $f(x)$, $h(x)$ имеют в т-ке x_0 предел равный A, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$. Пусть, кроме того, выполняются нер-ва $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.