Задание 5 - Предел функции в точке. Раскрытие неопределенности 0/0

Задача 1. Проверить что предел частного равен заданному числу

1.1 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7.$	1.18 $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{6x^2-75x-39}{x+1/2} = -81.$
1.2 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6.$	1.19 $\lim\limits_{x \to 11} \dfrac{2x^2-21x-11}{x-11} = 23.$
1.3 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7.$	1.20 $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{5x^2-24x-5}{x-5} = 26.$
1.4 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^2-14x+6}{x-3} = 10.$	1.21 $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13.$
1.5 $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{6x^2+x-1}{x+1/2} = -5.$	1.22 $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x^2+6x-8}{x+4} = -10.$
1.6 $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{6x^2-x-1}{x-1/2} = 5.$	1.23 $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{6x^2-x-1}{3x+1} = -\dfrac{5}{3}.$
1.7 $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{9x^2-1}{x+1/3} = -6.$	1.24 $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x+5} = -8.$
1.8 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7.$	1.25 $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{3x^2-40x+128}{x-8} = 8.$
1.9 $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{3x^2-2x-1}{x+1/3} = -4.$	1.26 $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{5x^2-51x+10}{x-10} = 49.$
1.10 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{7x^2+8x+1}{x+1} = -6.$	1.27 $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x-1/2} = -3.$
1.11 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} = 2.$	1.28 $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{3x^2+17x-6}{x+6} = -19.$
1.12 $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x-1/2} = 5.$	1.29 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^4-16} = \dfrac{3}{20}.$
1.13 $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{6x^2-5x+1}{x-1/3} = -1.$	1.30 $\lim\limits_{x \to -1/5} \dfrac{15x^2-2x-1}{x+1/5} = -8.$
1.14 $\lim\limits_{x \to -7/5} \dfrac{10x^2+9x-7}{x+7/5} = -19.$	1.31 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12} = \dfrac{1}{2}.$
1.15 $\lim\limits_{x \to -7/2} \dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7} = -\dfrac{1}{2}.$	1.32 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2} = -2.$

1.16 $\lim\limits_{x \to 5/2} \dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5} = \dfrac{1}{2}.$	1.33 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4-1} = \dfrac{3}{4}.$
1.17 $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3} = 5.$	1.34 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4-1} = \dfrac{3}{4}.$

Пример 1. Проверить что предел частного равен заданному числу

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = 0.$$

Решение типового примера 1. Неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Ответ: Предельное равенство верно.

Задача 2. Вычислить пределы функций

1.1 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\left(x^3-2x-1\right)\left(x+1\right)}{x^4+4x^2-5}.$	1.18 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}.$
1.2 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}.$	1.19 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}.$
1.3 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}.$	1.20 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x-2}.$
1.4 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}.$	1.21 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}.$
1.5 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}.$	1.22 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}.$
1.6 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\left(x^3-2x-1\right)^2}{x^4+2x+1}.$	1.23 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}.$
1.7 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(1+x\right)^3-(1+3x)}{x+x^5}.$	1.24 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}.$
1.8 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}.$	1.25 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}.$
1.9 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}.$	1.26 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}.$

1.10 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.	1.27 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.
1.11 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.	1.28 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.
1.12 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.	1.29 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.
1.13 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$.	1.30 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.
1.14 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.	1.31 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.
1.15 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.	1.32 $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$.
1.16 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.	1.33 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+3x^3}$
1.17 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.	1.34 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$

Пример 2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2-x-10}{x^3+8}.$$

Решение типового примера 2. Неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2-x-10}{x^3+8} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \to -2} \frac{2x-5}{x^2-2x+4} = \frac{-9}{12} = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: $-3/4$.

Теория и методические указания

Определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей). Пусть функция (ф-ция) $f(x)$ определена в окрестности (окр-ти) точки (т-ки) x_0, кроме, быть может, самой т-ки x_0. Рассмотрим в этой окр-ти посл-ть т-к

$$\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

Значения ф-ции в точках этой посл-ти также образуют числовую посл-ть

$$\{f(x_n)\}: f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \quad (2)$$

Число A наз-ся пределом ф-ции $f(x)$ в т-ке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой сх-ся к x_0 посл-ти (1) значений аргумента x, отличных от x_0 (т. е. $x \neq x_0$), соответствующая посл-ть (2) значений ф-ции сх-ся к числу A.

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ (или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$).

Ф-ция $f(x)$ может иметь в точке x_0 только один предел.

Определение предела функции по Коши (на языке $\varepsilon - \delta$).

Число A наз-ся пределом ф-ции $f(x)$ в т-ке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x из окр-ти т-ки x_0, кроме, быть может, самой т-ки x_0, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически это записывается так:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x: \ x \neq x_0, \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon.$

Отметим, что нер-ва $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ можно записать в виде $0 < |x - x_0| < \delta$.

Теорема 1. Определения предела ф-ции по Гейне и Коши эквивалентны.

Основные теоремы о пределах функции

Теорема 3. Пусть ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C, тогда ф-ции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (при $C \neq 0$) имеют в т-ке x_0 пределы, равные соответственно $B \pm C$, $B \cdot C$ и B/C.

Свойства конечных пределов

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = C$, тогда справедливы следующие равенства

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \pm C,$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \cdot C,$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(C \cdot f(x)\big) = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C \cdot B,$ где $C = \text{const},$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{B}{C},$ где $C \neq 0,$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x)\big)^k = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^k = B^k,$ где $k = \text{const}.$

Теорема 4. Пусть ф-ции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может, самой т-ки x_0, и функции $f(x)$, $h(x)$ имеют в т-ке x_0 предел равный A, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$. Пусть, кроме того, выполняются нер-ва $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.