Задание 7 - Замечательные пределы и следствия из них _ 1

Задача 1. Вычислить пределы функций

1.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$.	1.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.
1.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.	1.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$.
1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.	1.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$.
1.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.	1.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.
1.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$.	1.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$.
1.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+1/2)]}$.	1.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$.
1.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.	1.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$.
1.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.	1.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$.
1.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.	1.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.
1.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.	1.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$.
1.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.	1.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$.
1.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x^2}$.	1.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$.
1.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg}3x}$.	1.30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$.
1.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$.	1.31 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$.
1.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.	1.32 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}x^2}$

1.16 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$.	1.33 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$
1.17 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$.	1.34 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$

Пример 1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = 1$

Решение типового примера 1. Неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \begin{bmatrix} 2x = t \\ t \to 0 \end{bmatrix} = 2 \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \cdot 1 = 2$$

Ответ: 2.

Пример 2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x \sin x}{1-\cos x}$

Решение типового примера 2. Неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$. Используем тригонометрические формулы: $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x \sin x}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}} =$$

$$= \frac{2 \lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{x}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = \frac{2 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 3. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{6}{x}\right)^x$.

Решение типового примера 3. Неопределённость (1^∞).

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{6}{x}\right)^x = \begin{bmatrix} \text{обозначим} \\ \frac{6}{x} = t \Rightarrow x = \frac{6}{t}, \\ \text{при } x \to \infty \Rightarrow t \to 0. \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{6}{t}} = (\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}})^6 = e^6.$$

Ответ: e^6.

Пример 4. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{2x}$.

Решение типового примера 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+4)-2}{x+4}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x+4}\right)^{2x}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{обозначим}\\ -\dfrac{2}{x+4}=t\Rightarrow x=-\dfrac{2}{t}-4\\ \text{при } x\to\infty\Rightarrow t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{4}{t}-8}=$$

$$=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-4}\cdot\left(\lim_{t\to 0}(1+t)\right)^{-8}=e^{-4}\cdot 1=e^{-4}$$

Ответ: e^{-4}.

Пример 5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Решение типового примера 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{\operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot\ln(1+x^3)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3}{x^3\cdot\operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{\operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot 8=$$

$$=8\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^3=8\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}\right)^3=$$

$$=8\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=8.$$

Ответ: 8.

Теория и методические указания

Первый замечательный предел

Теорема 1. Предел функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ существует и равен 1, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел

Теорема 2. Предел функции $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ существует и равен числу e, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Замечание. Число e является пределом последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, причем это число иррациональное, т.е. представляется бесконечной непериодической десятичной дробью: e = 2,718281… . Более того, число e трансцендентное, т.е. не является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. В математическом анализе это число играет особую роль, в частности, является основанием натурального логарифма. Показательная функция с основанием e: $y=e^x$, называется ***экспонентой***.

Модификация второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left[\begin{array}{l}\text{замена}\\ \frac{1}{x}=t\end{array}\right]=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Третий замечательный предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Отметим, что формально третий замечательный предел является логарифмом от второго замечательного предела.

Четвертый замечательный предел

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Отметим, что четвертый замечательный предел получается из второго, если заменить e на $(1+x)^{1/x}$ при x, близких к нулю.

Пятый замечательный предел

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a.$$