

Тема 1. Возникновение первых математических понятий в доисторические времена

1. Зарождение счета в глубокой древности.
2. Пальцевой счёт.
3. Появление систем счисления.
4. Письменная нумерация у древних народов.
5. Возникновение понятия «натуральное число».

Процесс формирования математических понятий и регулярных приемов решения определенных классов элементарных задач охватывает огромный промежуток времени. Его начало, по всей вероятности, относится к далекому времени, когда человек перешел к использованию орудий для добывания средств существования, а затем и к обмену продуктов труда. Завершается этот период с появлением качественно новых форм математического мышления, т. е. тогда, когда совокупность этих понятий и методов и их содержание делаются достаточно богатыми, чтобы образовать логически связанные системы — начальные формы математических теорий. Последние возникают в математике около VI—V вв. до н. э.

Материальные свидетельства, по которым можно изучать этот самый ранний период в истории математики, немногочисленны и неполны. Исследователю приходится привлекать факты общей истории культуры человечества, по преимуществу археологические материалы и историю языка. История математики периода ее зарождения практически неотделима от общей истории человечества.

Формы и пути развития математических знаний у различных народов весьма разнообразны. Однако при всем своеобразии путей развития общим для всех народов является то, что все основные понятия математики: понятие числа, фигуры, площади, бесконечно продолжающегося натурального ряда и т. д. — возникли из практики и прошли длинный путь совершенствования.

Например, понятие числа возникло вследствие практической необходимости пересчета предметов. Вначале считали с помощью подручных средств: пальцев, камней, еловых шишек и т. д. Следы этого сохранились в названии математических исчислений: например, *calculus* в переводе с латинского означает *счет камешками*. Запас чисел на ранних ступенях весьма ограничен. Ряд известных и используемых натуральных чисел был конечен и

удлинялся лишь постепенно. Сознание неограниченной продолжимости натурального ряда является признаком высокого уровня знаний и культуры.

Наряду с употреблением все больших и больших чисел возникали и развивались их символы, а сами числа образовывали системы. Для ранних периодов истории материальной культуры характерно разнообразие числовых систем. Постепенно совершенствовались и унифицировались системы счисления. Употребляемая ныне во всех странах десятичная позиционная система нумерации — итог длительного исторического развития.

Зарождение счета в глубокой древности

Наши первоначальные представления о числе и форме относятся к очень отдаленной эпохе древнего каменного века — палеолита. В течении сотен тысячелетий этого периода люди жили в пещерах, в условиях, мало отличавшихся от жизни животных, и их энергия уходила преимущественно на добывание пищи простейшим способом — собиранием её, где только это было возможно. Люди изготавливали орудия охоты и рыболовства, вырабатывали язык для общения друг с другом, а в эпоху позднего палеолита украшали своё существование, создавая произведения искусства, статуэтки и рисунки.

Пока не произошёл переход от простого собирания пищи к активному её производству, от охоты и рыболовства к земледелию, люди мало продвинулись в понимании числовых величин и пространственных отношений. Лишь с наступлением этого фундаментального перелома, переворота, когда пассивное отношение человека к природе сменилось активным, мы вступаем в новый каменный век, в неолит.

Самым трудным этапом, который прошло человечество при выработке понятия о числе, считается выделение им понятия единицы из понятия «много». Оно произошло, по всей вероятности, ещё тогда, когда человечество находилось на низшей ступени развития. В.В. Бобынин объясняет такое выделение тем, что человек обычно захватывает рукой один предмет, а это, по его мнению, и выделило единицу из множества. Таким образом, начало счисления Бобынин мыслит как создание системы, состоящей из двух представлений: единица и неопределенное множество. [1].

Так, например, племя ботокудов, жившее в Бразилии, выражало числа только словами «один» и «много». Появление элемента «два» объясняется выявлением возможности взять по одному предмету в каждую руку. На первоначальном этапе счёта человек связывал это понятие с понятием обеих рук, в которых находится по одному предмету в каждой. При выражении понятия «три» встретилось затруднение: у человека нет третьей руки; это затруднение было преодолено, когда человек догадался помещать третий предмет у своих ног. Таким образом, «три» характеризовалось поднятием обеих рук и указанием на ноги. Отсюда сравнительно характерно произошло выделение и понятие «четыре», так как с одной стороны, к этому побуждало сопоставление двух рук и двух ног, а с другой – возможность поместить по одному предмету у каждой ноги. На первой ступени развития счета человек еще отнюдь не пользовался наименованием чисел, а выражал их или у ног, или соответствующими телодвижениями или жестами.

Дальнейшее развитие счета относится, вероятно, к той эпохе, когда человечество ознакомилось с некоторыми формами производства – охотой и рыболовством. Человеку пришлось изготавливать простейшие орудия для овладения этими производствами. Кроме того, продвижение человека в холодные страны заставило его делать одежду и создавать орудия для обработки кожи.

Мало-помалу сложилось первобытно-коммунистическое общество с соответствующим распределением пищи, одежды и орудия. Все эти обстоятельства вынудили человека так или иначе вести счет общего имущества, сил врага, с которым приходилось вступать в борьбу за овладение новыми территориями. Процесс счета уже не мог остановиться на четырех и должен был развиваться далее и далее.

На этой ступени развития человек уже отказывается от необходимости брать пересчитываемые предметы в руку или класть к ногам. В математику входит первая абстракция, заключающаяся в том, что пересчитываемые предметы заменяются какими-либо другими однородными между собой предметами или знаками: камешками, узелками, ветками, зарубками. Операция производится по принципу взаимно-однозначного соответствия: каждому пересчитываемому предмету в соответствие один из предметов, выбранных в качестве орудия счета (то есть один камешек, один узелок на веревке и т.д.). Следы такого рода счета сохранились у многих народов и до настоящего времени. Иногда такие примитивные орудия счета (камешки, раковины, косточки) нанизывали на шнурок или палочку, чтобы не растерять. Это

впоследствии привело к созданию более совершенных счётных приборов, сохранивших своё значение и до наших дней: русские счёты и сходный с ними китайский суан-пан.

Пальцевой счёт.

Развитие счёта пошло значительно быстрее, когда человек догадался обратиться к самому близкому ему, самому естественному счётному аппарату – к своим пальцам. Быть может, первым актом счёта по пальцам было оказание предмета, указательным пальцем; тут палец сыграл роль единицы. Участие пальцев в счёте помогло человеку переступить за число четыре, так как когда все пальцы на одной руке стали считаться равноценными единицами, это сразу позволило довести счёт до пяти. Дальнейшее развитие счёта потребовало усложнения счётного аппарата, и человек нашёл выход, привлекая к счёту сначала пальцы второй руки, а затем распространяя свой приём на пальцы ног: для племён, не носивших обуви, использование пальцев ног было вполне естественным. При этом такое расширение счётных этапов, очевидно, произошло в следствии возможности привести в однозначное соответствие пальцы рук и ног, что и отмечается у некоторых народов.

Так, для выражения числа «двадцать» индейцы из Южной Америки противопоставляют пальцы на руках пальцам на ногах.

В описываемую эпоху хозяйственные расчёты людей ограничивались тем, что после распределения пищи и одежды, захваченных в результате стычки с врагом, уже не было потребности помнить числа, возникшие во время расчётов, а потому счёт и не нуждался в наименованиях для чисел, а производился главным образом путём соответствующих жестов.

Например, туземные жители Андоманских островов, расположенных в Бенгальском заливе Индийского океана, не имели слов для выражения чисел и при счете объяснялись теми или иными жестами. Отсюда видно, что жестикуляция при счете как пережиток еще надолго сохранилось у многих народов, которые не вырабатывали словесную нумерацию.

Словесный счет начал развиваться, лишь когда ведущей формой производства стало сельское хозяйство. В ту пору постепенно возникла частная собственность, объектами которой служили поля, огороды, стада. Обладатели полей, домашних животных, будучи крепко связанными с ними,

вынуждены были не только считать принадлежащие им объекты, но и запоминать их число, а это и толкнуло человека путь создания именованных чисел. Сначала запоминание проводилось весьма громоздким и неуклюжим способом: путем восстановления в памяти внешних признаков запоминаемых предметов. Например, обладатель стада волов запоминал количество принадлежащих ему животных по тем признакам, что один вол серый, другой – черный и т.д. Разумеется такой способ запоминания не мог быть пригоден, когда число запоминаемых объектов было большим.

Следующей ступенью в развития наименования чисел надо признать появление описательных выражений совокупность нескольких единиц. Например, вместо наименования числа, выражающего два предмета, употреблялась фраза «столько, сколько у меня рук», наименование четыре передавалось фразой: «столько, сколько ног у животного». Итак, словесными выражениями нескольких предметов явилось преимущественно части тела человека и животного.

В дальнейшем эти описания выражения у многих народов заменились наименованием соответствующих слов, и таким образом эти наименования закрепились за числами. Так, число два стало выражаться словами, обозначающими «уши», «руки», «крылья», четыре – «нога страуса» (четырепалая) и пр.

Пальцевой счет постепенно приводил к упорядочению счета, и человек стихийно приходил к упрощению словесного выражения чисел. Так, например, выражение, которое должно соответствовать числу 11 – «десять пальцев на обеих руках и один палец на одной ноге» - упрощалось в «палец на ноге»; для выражения числа 23 вместо слов «десять пальцев на обеих руках, десять пальцев на обеих ногах и три пальца на руке другого человека» говорилось просто: «три пальца другого человека».

Подобного рода сокращения в то же время приводили как бы к выделению единиц из высшего разряда. В самом деле, такие названия, как «рука» - для обозначения пяти, «две руки» - для обозначения десяти, «нога» - для обозначения пятнадцати «человек» - для обозначения двадцати и т.п., служили для обозначения единиц высшего разряда, чем пальца, а пальцы играли роль единиц низшего разряда.

В этом смысле выражение «один на другой руке», означающее «шесть» можно рассматривать как «один из второго пятка» или как «пять и один», т.е.

«рука» - единица высшего разряда. Точно также наименование «два на ноге», означающее «двенадцать», указывало на то, что две единицы взяты из второго десятка; это можно было бы передать и такой фразой: «две руки и два пальца», где «две руки» играют роль единицы высшего порядка по отношению к пальцам.

Например, у некоторых племен с островов Торресова пролива существуют только единица – «урапун» и двойка – «оказа». При помощи этих чисел и происходит счет. На их языке три выражается, как «оказа урапун», четыре – «оказа okaza», пять – «оказа okaza урапун», шесть – «оказа okaza okaza» и т.д. Вот примеры счета некоторых австралийских племен: племя реки Муррей: 1 – «энза», 2 – «петчевал», 3 – «петчевал энза», четыре – «петчевал петчевал».

Письменная нумерация у древних народов.

Если развитие трудовых процессов и появление собственности заставили человека изобрести числа и их названия, то дальнейший рост экономических потребностей у людей вел их по пути все большего и большего расширения и углубления понятия о числе. Особенно значительные сдвиги в этом смысле произошли, когда возникли государства с более или менее сложным государственным аппаратом, потребовавшим учета имущества и создание налоговой системы, и когда товарообмен перешел в стадию развития торговли с применением денежной системы. С одной стороны, это повлекло за собой зарождение письменной нумерации, а с другой – стали развиваться счетные операции, т.е. появились действия над числами.

Своего рода запись чисел производилась еще в те отдаленные эпохи жизни человечества: все эти узелки, зарубки, нанизанные на шнур раковины, являлись ни чем иным, как зародышем записанного числа. Далее стали обозначать число 1 – одной черточкой, 2 – двумя, 3 – тремя и т.д.

Развитие числовой записи всегда сопровождалось общим подъёмом культурного уровня народов, а потому, протекало наиболее интенсивно в тех странах, которые быстро шли по пути развития государственности.

Среди народов земного шара в наиболее благоприятных условиях для развития их экономической и политической жизни были такие, которые обитали на стыке трех материков: Европы, Африки и Азии, а также народы занимавшие территории полуострова Индостан и современного Китая. Природные условия в этих местах были на редкость разнообразны. Это

разнообразие и крайняя дифференцированность наблюдались в развитии производительных сил и соответственно общественного быта.

Государства расположенные на этих территориях, явились первыми в истории человечества государствами, где мы находим зародыш современных наук и математики в частности.

Нумерация государств Древнего Востока и Рима.

Древневавилонское государство располагалось в той части Месопотамии где наиболее сближаются русла рек Тигра и Евфрата. Главный город этого государства – Вавилон находился на берегу Евфрата.

Расцвет вавилонского государства относится ко второй половине XVIII в. до н.э. Продукты сельского хозяйства (зерно, фрукты, скот) являлись предметами вывоза в соседние страны. Торговле благоприятствовало центральное положение Вавилона на берегу судоходных рек. Расцвет торговли повлек за собой развитие денежной системы мер. В Вавилоне была создана система мер аналогичная нашей метрической, только в основе её лежало не число 10, а число 60. Полностью эта система выдерживалась у вавилонян для измерения времени и углов, и мы унаследовали от них деление часа и градуса на 60 минут, а минуты на 60 секунд.

Исследователи по-разному объясняют появление у вавилонян шестидесятеричной системы счисления. Скорее всего здесь учитывалось основание 60, которое кратно 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 и 60, что значительно облегчает всякие расчеты.

Числовая запись у вавилонян возникла в весьма отдаленную эпоху. Предполагают, что вавилоняне заимствовали её у народов, которые жили на территории Вавилонского государства еще до его формирования. Эта запись, подобно вавилонской письменности, производилась на глиняных табличках путем выдавливания на них треугольных клиньев, причем орудием для записи служил трехгранный брусок. Такого рода клинопись состояла главным образом из трех положений клинка: вертикального острием вниз, горизонтального острием влево и горизонтального острием вправо. При этом знак ▼ означал единицу, 3 – десяток. При помощи этих знаков, применяя еще метод сложения, можно было выражать и многозначные числа. Например, знак ▼ ▼ ▼ изображал 5, знак 33 ▼ ▼ ▼ – число 23 и т.д. ▼ ▼

Зарождение египетской культуры относится к периоду времени за 4000 лет до н.э. Предполагают, что в эту эпоху была создана и египетская письменность. Первоначально она носила иероглифический характер, т.е. каждое понятие изображалось в виде отдельного рисунка. Но постепенно иероглифические записи принимали несколько иную форму, именуемую *иероглифической записью*.

Таким же методом производилась и запись чисел. При иероглифической записи числа выражались уже в десятичной системе, причем существовали особые знаки для разрядных чисел: единиц, десятков, сотен и т.д. Единица изображалась знаком |, десяток , сотня , тысяча , десять тысяч , сто тысяч , миллион , десять миллионов . При этом если единица какого-нибудь разряда содержалась в числе несколько раз, то она столько же раз повторялась в записи, т.е. соблюдался закон сложения.

У египтян употреблялись только единичные дроби, т.е. такие которые выражают только одну долю в нашей записи имеют в числителе единицу (такие дроби мы называем *аликвотными*). Исключение составила дробь $\frac{2}{3}$, для которой существовал особый знак: ; $\frac{1}{2}$ тоже имела особый знак , а все остальные выражались при помощи символа «ро», который имел вид . Чтобы изобразить какую-нибудь дробь рисовали этот символ и под ним ставили число, представлявшее знаменатель. Например, одна седьмая записывалась так: .

Записи производились преимущественно красками на папирусе. Иногда же материалом для записи служили камень, дерево, кожа, холст. Текст вписывался в строки преимущественно справа налево и столбцами сверху вниз.

Начальные понятия математики, зародившиеся в Древнем Китае, послужили развитию математической культуры соседних народов, которые занимали территорию современной Кореи Индокитая и с особенностями Японии.

В Китае рано начали накапливаться сведения математического характера и появилась запись чисел. При этом китайские иероглифические цифры были по записи еще сложнее египетских. (рис. в прил.).

Но, помимо этих иероглифических цифр, в Китае имели распространение и более простые цифровые знаки, употреблявшиеся при торговых операциях.

Выглядели они следующим образом: $|=1$; $||=2$; $=3$; $|=4$; $||=5$; $⊥=6$; $||=7$; $=8$; $|=9$; $0=0$. Запись чисел производилась столбцами сверху вниз. Большим преимуществом китайской записи чисел было введение в употребление нуля для выражения отсутствующих разрядов. Предполагают, что ноль заимствован из Индии в XII в.

Уже с давних времен в Китае вошел в употребление счетный прибор саун-пан, по конструкции напоминающий современные русские счеты (рис. в прил.). Главное его отличие от русских счетов в том, что наши счеты основаны на десятичной системе счисления, а в саун-пан смешанная пятеричная и двоичная система. В саун-пан каждая проволока делится на две части: в нижней её части нанизано 5 косточек, а в верхней – 2. Когда нижней части проволоки отсчитаны все пять косточек, то они заменяются одной в верхней части; где косточки в верхней части заменяются одной косточкой высшего разряда.

На заре человеческой культуры в развитии математики Китай шёл далеко впереди Вавилона и Египта.

Метод записи чисел у римлян, заимствован у древних этрусков – одного из племен Древней Италии. В этой записи сохранились следы пятеричной системы счисления, и числа выражались при помощи букв, а именно числа 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 обозначались собственно буквами I, V, X, L, C, D и M. Для более крупных чисел (10000, 100000, 1000000) существовали особые знаки. Для обозначения нуля знака не было. В записях они придерживались принципа сложения и вычитания: числа, написанные справа, прибавлялись, а числа написанные слева, вычитались от числа, написанного рядом с ним. Так, IX, XII, XC и CXXX означали соответственно 9, 12, 90 и 130. Римская запись чисел используется в наше время в тех случаях, когда надо записать какое-либо строго зафиксированное число, над которым не придется производить ни каких арифметических операций, например, дата постройки памятника или здания, век, глава в книге и т.п.

Вследствие затруднительности вычислений, римляне прибегали к помощи пальцевого счета или абака. (рис).

Этот абак представляет собой металлическую доску с желобками, вдоль которых могут передаваться жетоны. Продольных желобков девять, причем семь из них дают возможность отсчитывать единицы, десятки, сотни, тысячи, десятки тысяч, сотни тысяч и миллионы. Разряды единиц укрупняются при

переходе от правых желобков к левым (как это возможно видеть на рисунке). Два же самых правых желобка дают возможность вести отсчет дробных долей. желобки для целых чисел разделяются на две части: в верхней помещен один жетон, а в нижней – четыре. Верхний жетон заменяет пять нижних. Второй желобок справа тоже разделен на две части и дает возможность отсчитывать двенадцатые доли, причем верхняя его часть содержит один жетон, а нижняя – пять. Самый правый желобок разделен на три части, из которых верхняя даёт отчет 24-х долей, средняя 48-х и нижняя – 72-х. На правом чертеже представлен отчет, равный $84\ 071+2|12+1|72$.

Числа в Индии.

Особенно ценный вклад в арифметику внесен индийцами. В этом отношении математика обязана индийцам упорядочением числовой записи при помощи введения цифр для десятичной системы счисления и установления принципа поместного значения цифр. Кроме того, в Индии получило распространение употребление нуля для указания соответствующих разрядных единиц, что тоже сыграло большую роль в усовершенствовании числовых записей и облегчении операций над числами.

Цифровые знаки Индии не совпадают по очертаниям с современными цифрами, но все же имеют с ними в некоторых случаях большое сходство. Так, например, очень походили на современные цифры индийские знаки, изображавшие единицу, семерку и нуль. Остальные знаки в течение многих веков, отделяющих нас от времени их происхождения, сильно видоизменялись.

Введение нуля, цифр и принципа поместного их значения облегчило вычислительные операции над числами, а потому арифметические вычисления и получили в Индии значительное развитие. Главное преимущество введения индийцами методов записи чисел заключается в том, что они значительно уменьшили количество цифр, применяли позиционную систему к десятичному счету и ввели в употребление знак нуля. В то время как у греков, евреев, сирийцев и т.д. для записи чисел употреблялось до 27 различных цифровых знаков, у индийцев число таких цифровых знаков снизилось до 10, включая и обозначение нуля. Что касается позиционной системы, её зачатки были еще у вавилонян, но там эта система применялась для шестидесятеричного счета, а индийцы ввели её для десятичного. Наконец, применение знака для нуля при позиционной системе дало большое преимущество перед записью чисел у вавилонян. Так, например, у вавилонян

значок ▼ мог обозначать и единицу и $1/60$, и вообще любое число вида 60^n , а в записи у индийцев знак 1 мог обозначать только единицу, так как для обозначения десятка, сотни и так далее после единицы записывалось соответствующее число нулей.

Процесс записи чисел и проведение арифметических операций над ними делались индийцами на белой доске, засыпанной красным песком. Орудием для записи служила палочка. Таким образом, при записи на красной поверхности появлялись белые знаки, прочерченные палочкой.

Числа народов Средней Азии.

Начиная с VII в. в истории народов, входящих в состав государств Средней Азии и Ближнего Востока значительную роль начинает играть арабское государство. Из мелких арабских государств, целиком умещавшихся на Аравийском полуострове в VII-VIII вв., был создан арабский халифат – государство, занимающее огромную территорию. В его состав вошли, кроме основной территории арабов, Палестина, Сирия, Месопотамия, Персия, Закавказье, Средняя Азия, Северная Индия, Египет, Северная Африка и Пиренейский полуостров. Столицей халифата сначала был Дамаск, а затем в VIII в. вблизи бывшего Вавилона был построен новый город – Багдад, куда и была перенесена столица.

Так многие из представителей народов, вошедших в халифат, писали на арабском языке, то буржуазные историки неправильно включают работы ученых этих народов в число работ арабов.

Первым по времени крупным математиком был у народов входивших в состав халифата, мы назовем великого узбекского (хорезмийского) математика и астролога IX в. Мухаммеда бен Мусса аль-Хорезми (2-я половина VIII в. – между 830-840).

Сочинение аль-Хорезми по арифметике дошло до нашего времени только в переводе на латинский язык. Оно сыграло значительную роль в развитии европейской математики, так как именно в нем европейцы познакомились с индийскими методами записи чисел, то есть с системой индийских цифр, с употреблением нуля и с помесным значением цифр. Вследствие того, что сведения эти были получены европейцами из книги, автор которой жил в арабском государстве и писал на арабском языке, индийские цифры десятичной системы стали неправильно именоваться «арабскими цифрами».

Нумерация на Руси.

Восточно-славянские племена, древние предки русской, украинской и белоруской народностей начали формироваться около 2-3 т. лет до н.э. В VII и VIII вв. у славян появились первые города. Первыми большими городами Руси были Киев и Новгород.

В X в., в княжение Владимира Святославовича (?-1015), древнерусское государство (Киевская Русь) достигло наибольшего расцвета и могущества. По развитию культуры оно занимало одно из видных мест среди государств Европы. На Руси в эту эпоху параллельно с общим развитием культуры шло сравнительно быстрое распространение сведений из математики.

Правда, до нашего времени не сохранилось никаких памятников математической литературы, которые давали бы нам возможность судить о развитии математики на Руси в IX-X вв., но документы другого характера позволяют делать некоторые выводы в этом отношении. Первым русским памятником математического содержания до настоящего времени считается рукописное сочинение новгородского монаха *Кирика*, написанное им в 1136 г. и носящее заголовок «Критика диакона и доместика Новгородского Антониева монастыря учение имже ведати человеку числа всех лет».

В этом сочинении Кирик выявил себя весьма искусным счетчиком и великим числолюбом. Основные задачи, которые разрешаются Кириком, хронологического порядка: вычисление времени, протекшего между каким-либо событием. При вычислениях Кирик пользовался той системой нумерации, которая называлась малым перечнем и выражалась следующими наименованиями: 10000 – тьма, 100 000 – легион, или неведий, 1 000 000 – леодр.

Кроме малого перечня, в Древней Руси существовал еще больший перечень, который давал возможность оперировать с очень большими числами. В системе перечня основные разрядные единицы имели те же наименования, что и в малом, но соотношения между этими единицами были иные, а именно:

Тысяча тысяч – тьма;

Тьма тем – легион, или певедий;

Легион легионов – леодр;

Леодр леодров – ворон;

10 воронов – колода.

В последнем из этих чисел, т.е. о колоде, говорилось: «И более сего несть человеческому уму разумевати».

Единицы, десятки и сотни изображались славянскими буквами с поставленным над ними знаком, называемым титло, для отличия цифр от букв. Тысячи изображались теми же буквами, но перед ними ставился знак. Так, изображала единицу, - двадцать два, - шесть тысяч и т.д.

Тьма, легион и леодр изображались теми же буквами, но для отличия от единиц, десятков, сотен и тысяч они обводились кружками. Так, изображало три тьмы; - три легиона, а - три леодра.

К XVI в. относится изобретение замечательного счетного прибора, получившего впоследствии название «русские счеты» (рис). Как полагают, идея создания этого прибора принадлежит русским купцам Строгоновым. Дробь в Древней Руси назывались долями, позднее «ломанными числами». В старых руководствах находим следующие названия дробей на Руси:

$\frac{1}{2}$ - половина, полтина, $\frac{1}{3}$ - треть, $\frac{1}{4}$ - четь, $\frac{1}{6}$ - полтреть, $\frac{1}{8}$ - полчеть, $\frac{1}{12}$ - полполтреть, $\frac{1}{16}$ - полполчеть, $\frac{1}{24}$ - полполполтреть (малая треть), $\frac{1}{32}$ - полполполчеть, $\frac{1}{5}$ - пятина, $\frac{1}{7}$ - седьмина, $\frac{1}{10}$ - десятина.

Славянские нумерации употреблялись в России до XVI в., лишь в этом веке в нашу страну постепенно стала проникать десятичная позиционная система счисления. Она окончательно вытеснила славянскую нумерацию при Петре I.

Системы счисления

В современном мире известно множество способов представления чисел. Число можно представить группой символов некоторого алфавита.

Система счисления – совокупность правил для обозначения и наименования чисел.

Самая простейшая система счисления – унарная, в которой используется всего 1 символ (палочка, узелок, зарубка, камушек и т.д.

Наиболее совершенным принципом представления чисел является

позиционный (поместный) принцип, согласно которому один и тот же числовой знак (цифра) имеет различные значения в зависимости от места, где он расположен.

Несмотря на кажущуюся естественность такой системы, она явилась результатом длительного исторического развития. Возникновение десятичной системы счисления связывают со счетом на пальцах. Имелись системы счисления и с другим основанием: 5, 12 (счет дюжинами), 20 (следы такой системы сохранились во французском языке, например quatre – vings, т. е. буквально четыре – двадцать, означает 80), 40, 60 и др. При вычислениях на ЭВМ часто применяется система счисления с основанием 2.

У первобытных народов не существовало развитой системы счисления. Еще в 19 веке у многих племен Австралии и Полинезии было только два числительных: один и два; сочетания их образовывали числа: 3 —два — один, 4 — два — два, 5 — два — два — один и 6 — два — два — два. О всех числах, больших 6, говорили «много», не индивидуализируя их. С развитием общественно — хозяйственной жизни возникла потребность в создании систем счисления, которые позволяли бы и обозначать все большие совокупности предметов. Одной из наиболее древних систем счисления является египетская иероглифическая нумерация, возникшая еще за 2500 — 3000 лет до н. э. Это была десятичная непозиционная система счисления, в которой для записи чисел применялся только принцип сложения (числа, выраженные рядом стоящими цифрами, складываются).

Аналогичными системами счисления были греческая геродианова, римская, сирийская и др.

Римские цифры — традиционное название знаковой системы для обозначения чисел, основанной на употреблении особых символов для десятичных разрядов:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Более совершенными системами счисления являются алфавитные: ионийская, славянская, еврейская, арабская, а также грузинская и армянская. В алфавитных системах счисления, запись чисел гораздо короче, чем в предыдущих; кроме того, над числами, записанными в алфавитной нумерации, гораздо легче производить арифметические действия. Однако в алфавитных системах счисления нельзя записывать сколь угодно большие числа.

В системе счисления древних вавилонян, возникшей примерно за 2000 лет до

н. э. все числа записывались с помощью двух знаков: (для единицы) и (для десяти). Числа до 60 записывались как комбинации этих двух знаков с применением принципа сложения. Число 60 снова обозначалось знаком , являясь единицей высшего разряда. Для записи чисел от 60 до 3600 вновь применялся принцип сложения, а число 36 000 обозначалась тем же знаком, что и единица, и т. д. Число $343=5*60+4*10+3$ в этой системе записывалось так:

Однако в силу отсутствия знака для нуля, которым можно было бы отмечать недостающие разряды, запись чисел в этой системе счисления не была однозначной. Особенностью вавилонской системы счисления было то, что абсолютное значение чисел оставалось неопределенным.

Другая система счисления основанная на позиционном принципе, возникла у индейцев майя, обитателей полуострова Юкатан (Центральная Америка) в середине 1 – го тыс. н. э. У майя существовали две системы счисления: одна, напоминающая египетскую, употреблялась в повседневной жизни, другая – позиционная, с основанием 20 и особым знаком для нуля, применялась при календарных расчетах. Запись в этой системе, как и в нашей современной, носила абсолютный характер.

Современная десятичная позиционная система счисления возникла на основе нумерации, зародившейся не позднее 5 в. в Индии. До этого в Индии имелись системы счисления, в которых применялся не только принцип сложения, но и принцип умножения (единица какого – нибудь разряда умножается на стоящее слева число). Аналогично строились старокитайская система счисления и некоторые другие. Если, например, условно обозначить число 3 символом III, а число 10 символом X, то число 30 запишется как IIIX (три десятка). Такие системы счисления могли служить подходом к мозданию десятичной позиционной нумерации.

Десятичная позиционная система дает принципиальную возможность записывать сколь угодно большие числа. Запись чисел в ней компактна и удобна для производства арифметических операций. Поэтому вскоре после возникновения десятичная позиционная система счисления начинает распространяться из Индии на Запад и Восток. В 9 веке появляются рукописи на арабском языке, в которых излагается эта система счисления, в 10 веке десятичная позиционная нумерация доходит до Испании, в начале 12 века она появляется и в других странах Европы. Новая система счисления получила название арабской, потому что в Европе с ней познакомились

впервые по латинским переводам с арабского. Только в 16 веке новая нумерация получила широкое распространение в науке и житейском обиходе. В России она начинает распространяться в 17 веке и в самом начале 18 в. вытесняет алфавитную. С введением десятичных дробей десятичная позиционная система счисления стала универсальным средством для записи всех действительных чисел.

Натуральные числа.

Понятие натурального числа, вызванное потребностью счёта предметов, возникло ещё в доисторические времена. Процесс формирования понятия натурального числа протекал следующим образом. На низшей ступени первобытного общества понятие отвлеченного числа отсутствовало. Это не значит, что первобытный человек не мог отдавать себе отчёта о количестве предметов конкретно данной совокупности, например о количестве людей, участвующих в охоте, о количестве озёр, в которых можно ловить рыбу, и т.д. Но в сознании первобытного человека ещё не сформировалось то общее, что есть в объектах такого рода, как например, "три человека", "три озера" и т.д. Анализ языков первобытных народностей показывает, что для счёта предметов различного рода употреблялись словесные обороты. Слово "три" в контекстах "три человека", "три лодки" передавались различно. Конечно, такие именованные числовые ряды были очень короткими и завершались индивидуализированным понятием ("много") о большом количестве тех или других предметов, которое тоже являлось именованным, то есть выражалось разными словами для предметов разного рода, такими, как "толпа", "стадо", "куча" и т.д.

Вопрос об обосновании *понятия натурального числа* долгое время в науке не ставился. Понятие натурального числа столь привычное, что не возникло потребности в его определении в терминах каких - либо более простых понятий. Лишь в середине 19 в. под влиянием развития *аксиоматического* метода в математике, с одной стороны, и критического пересмотра основ математического анализа - с другой, назрела необходимость обоснования понятия количественного натурального числа. Отчётливое определение понятия натурального числа на основе понятия множества (совокупности предметов) было дано в 70-х гг. 19в. в работах Г. Кантора. Сначала он определяет понятие равномощности совокупностей. Именно, две совокупности называются *равномощными*, если составляющие их предметы могут быть сопоставлены по одному. Затем число предметов,

составляющих данную совокупность, определяется как-то общее, что имеет данная совокупность и всякая другая, равномошная ей совокупность предметов, независимо от всяких качественных особенностей этих предметов. Такое определение отражает сущность натурального числа как результата счёта предметов, составляющих данную совокупность.

Возникновение понятия натурального числа было важнейшим моментом в развитии математики. Появилась возможность изучать эти числа независимо от тех конкретных задач, в связи с которыми они возникли. С развитием понятия натурального числа как результата счёта предметов в обиход включаются действия над числом. Действия сложения и вычитания возникают сначала как действия над самими совокупностями в форме объединения двух совокупностей в одну и отделения части совокупности. Умножение, по-видимому, возникло в результате счёта равными частями (по два, по три...), деление - как деление совокупности на равные части. Лишь во многовековом опыте сложилось представление об отвлеченном характере этих действий, о независимости количественного результата действия от природы предметов, составляющих совокупности, о том, что, например, два предмета и три предмета составят пять предметов независимо от природы этих предметов. Тогда стали разрабатывать правила действий, изучать их свойства, создавать методы для решения задач, т.е. начинается развитие науки о числе. Теоретическая наука, которая стала изучать числа и действия над ними, получила название "арифметика". Слово "арифметика" происходит от греческого *arithmos*, что значит "число". Следовательно, арифметика - это наука о числе.